

 **Zadanie 1.** Niech  $a, b, c > 0$  oraz  $a + b + c = 67$ . Udowodnij, że

$$4 \left( a\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{b} + c\sqrt[3]{c} \right) + a + b + c \geq 1000.$$

**Autor zadania:** Tomasz Kossakowski

**Rozwiązanie:** Rozważmy funkcję

$$f(x) = x^{4/3}, \quad x > 0.$$

Mamy

$$f''(x) = \frac{4}{9}x^{-2/3} > 0,$$

zatem funkcja  $f$  jest wypukła na  $(0, \infty)$ .

Z nierówności Jensena dla trzech zmiennych otrzymujemy

$$\frac{f(a) + f(b) + f(c)}{3} \geq f\left(\frac{a + b + c}{3}\right).$$

Stąd

$$a^{4/3} + b^{4/3} + c^{4/3} \geq 3 \left( \frac{67}{3} \right)^{4/3}.$$

Podstawiając do lewej strony nierówności z treści zadania, dostajemy

$$4 \left( a^{4/3} + b^{4/3} + c^{4/3} \right) + 67 \geq 4 \cdot 3 \left( \frac{67}{3} \right)^{4/3} + 67.$$

Obliczając wartość prawej strony, otrzymujemy

$$4 \cdot 3 \left( \frac{67}{3} \right)^{4/3} + 67 \approx 1147 > 1000.$$

Zatem

$$4 \left( a\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{b} + c\sqrt[3]{c} \right) + a + b + c \geq 1000,$$

co kończy dowód. □



**Zadanie 2.** Określmy ciąg  $a_n$  wzorami:  $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + n + 1$  dla każdej dodatniej liczby całkowitej  $n$ . Dodatnią liczbę całkowitą  $k$  nazwiemy *chińskostrawną*, jeśli liczba  $8k + 1$  jest kwadratem liczby całkowitej, a także

$$\prod_{i=1, a_i \leq k} a_i$$

jest kwadratem liczby całkowitej. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb chińskostrawnych.

**Autor zadania:** Bartosz Trojanowski

**Rozwiązanie:** Ustalmy takie  $k$ , że  $\sqrt{8k+1} \in \mathbb{Z}$ . Udowodnimy najpierw, że istnieje taka liczba  $s$ , że  $a_s = k$ . Zauważmy, że  $a_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ . Liczba  $8k+1$  jest nieparzysta, więc połóżmy  $8k+1 = (2t+1)^2$ . Proste obliczenia pozwalają stwierdzić, że  $k = \frac{t(t+1)}{2}$ . Wystarczy więc wziąć  $s = t$ . Zatem

$$\prod_{i=1, a_i \leq k} a_i = \prod_{i=1}^t a_i = \frac{1 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{t(t+1)}{2} = \frac{(t!)^2(t+1)}{2^t}.$$

Wystarczy zatem wykazać, że istnieje nieskończenie wiele takich  $t$ , że  $\frac{t+1}{2^t}$  jest kwadratem liczby wymiernej. Niech  $t+1 = 2x^2$ . Wówczas  $\frac{t+1}{2^t} = \left(\frac{x}{2^{x^2-1}}\right)^2$ , zatem liczba ta jest faktycznie kwadratem. Ponieważ  $8\frac{2x^2(2x^2-1)}{2} + 1 = (4x^2 - 1)^2$ , to warunki zadania są spełnione. ■

Tym zestawem zamykamy nie tylko 2025. rok, lecz również serię zadań publikowanych systematycznie przez nasz projekt.

Dziękujemy wszystkim za udział, poświęcony czas oraz matematyczne zaangażowanie.

Zespół MathLovers

Scarlett Lafa, Tomasz Kossakowski, Antonina Pajek, Bartosz Trojanowski,  
Maria Janyska, Robert Rościzak, Maja Chlewicka, Michał Fronczek,  
Grzegorz Rudnicki, Antoni Syska, Michalina Ziernik, Wiktoria Wilińska