

 **Zadanie 1.** Znajdź liczbę par (a, b) mniejszych od swoich liczb modulo, dla których układ kongruencji

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{15}, \\ x \equiv b \pmod{12} \end{cases}$$

ma rozwiązanie.

Autor zadania: Antonina Pajek

Rozwiązanie: Zapiszmy podany układ kongruencji w postaci równoważnej:

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{5}, \\ x \equiv a \pmod{3}, \end{cases} \quad \begin{cases} x \equiv b \pmod{4}, \\ x \equiv b \pmod{3}. \end{cases}$$

Widzimy, że aby układ miał rozwiązanie, konieczne i wystarczające jest spełnienie warunku

$$a \equiv b \pmod{3}.$$

Policzmy teraz, ile liczb mniejszych od 12 i 15 daje każdą z reszt modulo 3.

Dla liczb modulo 12:

$$\begin{aligned} \text{reszta } 0 &: \{0, 3, 6, 9\} \quad (4 \text{ liczby}), \\ \text{reszta } 1 &: \{1, 4, 7, 10\} \quad (4 \text{ liczby}), \\ \text{reszta } 2 &: \{2, 5, 8, 11\} \quad (4 \text{ liczby}). \end{aligned}$$

Dla liczb modulo 15:

$$\begin{aligned} \text{reszta } 0 &: \{0, 3, 6, 9, 12\} \quad (5 \text{ liczb}), \\ \text{reszta } 1 &: \{1, 4, 7, 10, 13\} \quad (5 \text{ liczb}), \\ \text{reszta } 2 &: \{2, 5, 8, 11, 14\} \quad (5 \text{ liczb}). \end{aligned}$$

Dla ustalonej reszty modulo 3 możemy więc wybrać parę (a, b) na $4 \cdot 5 = 20$ sposobów. Ponieważ mamy trzy możliwe reszty modulo 3, łączna liczba par (a, b) wynosi

$$3 \cdot 20 = 60.$$