

Zadanie 1. Wszystkie wyrazy nieskończonego ciągu geometrycznego zbieżnego są różne od zera. Wykaż, że iloraz dowolnie wybranego wyrazu tego ciągu przez sumę wszystkich wyrazów, które po nim występują, jest stały. Podaj ten stały iloraz.

Źródło zadania: Matematyka zbiór zadań klasa 3 zakres rozszerzony

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Maja Chlewicka

Rozwiązanie: $a_1 \cdot q \neq 0$, więc $a \neq 0$ i $q \neq 0$. Ponadto, $|q| < 1$ i $S = \frac{a_1}{1-q}$
Rozważmy, dla pewnego $k > 0$ liczbę:

$$\frac{a_k}{a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \dots}$$

$$a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \dots = \frac{a_{k+1}}{1-q} = a_1 \cdot \frac{q^k}{1-q}$$

$$\cancel{a_1} \cdot \frac{q^{k-1}}{\cancel{a_1}} \cdot \frac{1-q}{q^k} = q^{-1} \cdot (1-q) = \frac{1-q}{q} = \text{const.}$$

co kończy dowód.

 **Zadanie 2.** Niezerowe liczby rzeczywiste a, b spełniają warunek

$$(a + b^2)(a^3 + b^3) = a^4 + b^5.$$

Wykaż, że $b < 0$.

Źródło zadania: XXI Olimpiada Matematyczna Juniorów, Zawody pierwszego stopnia - część zadaniowa

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Maja Chlewicka **Rozwiązanie:** Przekształcając równanie otrzymamy:

$$(a + b^2)(a^3 + b^3) = a^4 + b^5,$$

$$a(a^3 + b^3) + b^2(a^3 + b^3) = a^4 + b^5,$$

$$a^4 + ab^3 + a^3b^2 + b^5 = a^4 + b^5,$$

$$ab^3 + a^3b^2 = 0,$$

$$ab^2(b + a^2) = 0.$$

Ponieważ $a \neq 0$, oraz $b \neq 0$, z ostatniej równości wynika, że $b + a^2 = 0$, czyli $b = -a^2$. Ponieważ $a^2 > 0$ dla każdego $a \neq 0$, otrzymujemy $b < 0$.