

 **Zadanie 1.** Rozwiązać w dodatnich liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań:

$$\begin{cases} xy + xy^2z = 2 \\ yz + xyz^2 = 2 \\ zx + x^2yz = 2 \end{cases}$$

Autor zadania: Michał Fronczek

Rozwiązanie: Dzieląc zadane równania kolejno przez dodatnie $x + xyz$, $y + xyz$ i $z + xyz$ dostajemy:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{x + xyz} \\ z = \frac{2}{y + xyz} \\ x = \frac{2}{z + xyz} \end{cases}$$

Rozważy pewne rozwiązanie (x, y, z) zadanego układu równań. Weźmy funkcję $f(a) = \frac{2}{a + xyz}$. Jest to funkcja harmoniczna przesunięta w lewo (bo $xyz > 0$) o xyz . A zatem na przedziale liczb dodatnich rzeczywistych jest ona monotoniczna, malejąca. Nasz układ równań ma teraz formę:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = f(y) \\ x = f(z) \end{cases}$$

Założmy najpierw, że $x > y$. Wtedy z faktu, że f jest malejąca mamy $f(x) < f(y)$ czyli $y < z$. Teraz więc $f(y) > f(z)$ czyli $z > x$ i ostatecznie $f(z) < f(x)$ czyli $x < y$. Sprzeczność. Analogiczny problem znajdujemy gdy $x < y$. A zatem $x = y$ i idąc dalej dla innych zmiennych dostajemy $x = y = z$. Podstawiając to do jednego z równań wyjściowych mamy:

$$\begin{aligned} x^2 + x^4 &= 2 \\ (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 2) &= 0 \end{aligned}$$

Czyli $x^2 = 1$ lub $x^2 = -2$, druga opcja jest oczywistą sprzecznością (bo kwadrat jest nieujemny), czyli $x^2 = 1$ i skoro $x > 0$ to $x = 1$. Ostatecznie więc $x = y = z = 1$. Pozostaje zauważyć, że taka opcja spełnia warunki zadania.

Odpowiedź: $x = y = z = 1$

Zadanie 2. Znajdź wszystkie wielomiany $P(x)$ o współczynnikach całkowitych takie, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n $P(n) > 0$ oraz $P(P(n) + n)$ jest liczbą pierwszą.

Autor zadania: Michał Fronczek

Rozwiązanie: Zauważmy najpierw, że jeśli P miałby być stały, to musi on być liczbą pierwszą. Taka opcja oczywiście działa. Załóżmy zatem, że P nie jest stałe. Po pierwsze zauważmy, że z warunków zadania mamy $P(n) + n > 0$, gdyż oba składniki sumy są na mocy założeń dodatnie. Mamy więc $P(P(n) + n) > 0$.

Istnieje fakt, że dla wielomianu W o współczynnikach całkowitych oraz różnych liczb całkowitych a i b , $a - b$ dzieli $P(a) - P(b)$. Wynika to z faktu, że $P(a) - P(b)$ to tak na prawdę suma wyrażeń postaci $a_i \cdot (a^i - b^i)$ dla a_i całkowitego, co ze wzorów skróconego mnożenia jest podzielne przez $a - b$. Skoro P ma współczynniki całkowite, to całkowite jest również $P(n)$, dalej $P(n) + n$ i ostatecznie $P(P(n) + n)$. Mamy więc, że dla $a = P(n) + n$ i $b = n$ wyrażenie $(P(n) + n) - n = P(n)$ dzieli $P(P(n) + n) - P(n)$. Ale $P(n)$ dzieli $P(n)$, czyli dostajemy, że $P(n)$ dzieli $P(P(n) + n)$. Z założenia jednak ten drugi ma być liczbą pierwszą, tym samym albo $P(n) = 1$, albo $P(P(n) + n) = P(n)$. P nie jest stały, a zatem od pewnego momentu (idąc od 0 do $+\infty$) zacznie być stale monotoniczny i dążyć do $+\infty$ lub $-\infty$. Z założenia jednak $P(n)$ jest dodatnie, zatem druga opcja odpada. Istnieje zatem takie N , że dla każdego $n > N$ P jest monotoniczny, rosnący do nieskończoności, czyli większy od 1. Weźmy zatem $n > N$. Mamy wówczas, że $P(n) > 1$, czyli musi zachodzić $P(P(n) + n) = P(n)$. Mamy natomiast, że $P(n) > 0$, czyli $P(n) + n > n > N$, a zatem z monotoniczności $P(P(n) + n) > P(n)$, co z kolei jest sprzeczne z wcześniej postawionym stwierdzeniem. Tym samym dla $\deg(P) > 0$ dostaliśmy sprzeczność.

Odpowiedź: P jest wielomianem stałym, równym liczbie pierwszej.