

 **Zadanie 1.** Rozstrzygnąć, czy istnieją takie dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniające warunki

$$\begin{cases} abc \leq (\sqrt{2} - 1)^3, \\ \frac{1}{a} + b < \sqrt{2} + 2, \\ \frac{1}{b} + c < \sqrt{2} + 1, \\ \frac{1}{c} + a < \sqrt{2}. \end{cases}$$

Autor zadania: Bartosz Trojanowski

Rozwiązanie: Dodając drugą, trzecią i czwartą nierówność dostajemy

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 3(\sqrt{2} + 1) - a - b - c.$$

Z nierówności między średnią geometryczną i harmoniczną mamy

$$\sqrt{2} - 1 \geq \sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} > \frac{3}{3(\sqrt{2} + 1) - a - b - c}.$$

Mnożąc tą nierówność przez $\sqrt{2} + 1$ dostajemy więc

$$3(\sqrt{2} + 1) - a - b - c > 3(\sqrt{2} + 1) \iff a + b + c < 0.$$

Przeczy to jednak temu, że a, b, c są dodatnie. Zatem takie liczby nie istnieją. ■

 **Zadanie 2.** Niech $a, b, c > 0$ oraz $a + b + c = 3$. Udowodnij, że

$$\sqrt{\frac{a}{a+1}} + \sqrt{\frac{b}{b+1}} + \sqrt{\frac{c}{c+1}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Autor zadania: Tomasz Kossakowski

Rozwiązanie: Rozważmy funkcję

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}, \quad x > 0.$$

Obliczamy drugą pochodną:

$$f''(x) = \frac{-1 - 4x}{4 \left(\frac{x}{1+x} \right)^{\frac{3}{4}} (1+x)^4} < 0 \quad \text{dla } x > 0.$$

Zatem funkcja f jest wklęsła na przedziale $(0, \infty)$.

Stosujemy nierówność Jensena dla funkcji wklęsłej:

$$\frac{f(a) + f(b) + f(c)}{3} \leq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right).$$

Ponieważ $a + b + c = 3$, otrzymujemy

$$\frac{f(a) + f(b) + f(c)}{3} \leq f(1) = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Po wymnożeniu przez 3:

$$\sqrt{\frac{a}{a+1}} + \sqrt{\frac{b}{b+1}} + \sqrt{\frac{c}{c+1}} \leq 3 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b = c = 1$.