

 **Zadanie 1.** Udowodnij, że istnieje $A \in \mathbb{R}$ takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq A.$$

Źródło: zadanie znane i lubiane

Wybór zadania: Tomasz Kossakowski

Rozwiązanie: Podnosząc wyrażenie do potęgi otrzymujemy:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}.$$

Dla każdego $k \geq 0$ mamy szacowanie

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \leq \frac{n^k}{k!},$$

a więc

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}.$$

Stąd

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

Zatem możemy przyjąć $A = e$, co kończy dowód.

Zadanie 2. Niech O będzie punktem wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC . Niech p, q będą różnymi prostymi przechodzącymi przez O , przy czym obie przecinają boki AB i AC . Oznaczmy $K = p \cap AB$, $L = p \cap AC$, $M = q \cap AC$, $N = q \cap AB$. Okręgi opisane na trójkątach NKO i MOL przecinają się w $P \neq O$. Załóżmy, że punkty A, N, K, B oraz A, L, M, C leżą odpowiednio na bokach AB i AC w tej kolejności. Udowodnić, że

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle PKL + \sphericalangle PMN.$$

Autor zadania: Bartosz Trojanowski

Rozwiązanie: Zauważmy, że

$$\sphericalangle AMP = \sphericalangle PML = 180^\circ - \sphericalangle POL = \sphericalangle POK = \sphericalangle PNK = 180^\circ - \sphericalangle PNA.$$

Stąd czworokąt $ANPM$ jest cykliczny. Mamy też

$$\sphericalangle PLK = \sphericalangle PLO = \sphericalangle PMO = \sphericalangle PMN = \sphericalangle PAN = \sphericalangle PAK,$$

więc czworokąt $AKPL$ również jest cykliczny. Stąd

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAP + \sphericalangle CAP = \sphericalangle NAP + \sphericalangle LAP = \sphericalangle PMN + \sphericalangle PKL},$$

a to kończy dowód. ■

