

 **Zadanie 1.** Udowodnij, że każdą liczbę całkowitą można przedstawić w postaci $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm k^2$ dla pewnego $k > 1$ i pewnego wyboru znaków.

Autor zadania: Robert Rościzak

Rozwiązanie: Zauważmy, że $(a-1)^2 - a^2 - (a+1)^2 + (a+2)^2 = 4$. Pozostaje skonstruować reszty 0, 1, 2, 3:

- $1^1 = 1 \equiv 1 \pmod{4}$,
- $-1^2 + 2^2 - 3^2 = -6 \equiv 2 \pmod{4}$,
- $-1^2 \equiv 3 \pmod{4}$,
- $\emptyset \equiv 0 \pmod{4}$.

Zadanie 2. Dla zbiorów X, Y liczb całkowitych definiujemy $X - Y = \{x - y \mid x \in X, y \in Y\}$. Dane są zbiory A, B, C liczb całkowitych. Udowodnij nierówność

$$|A - B| \cdot |A - C| \geq |A| \cdot |B - C|.$$

Źródło Zadania: Ruzsa's Triangle Inequality **Wybór zadania:** Robert Rończak

Rozwiązanie: Dla każdego elementu $i \in B - C$ ustalmy jednoznacznie b_i, c_i spełniające $b_i \in B, c_i \in C, b_i - c_i = i$. Jeżeli takich par jest wiele to wybieramy jedną.

Udowodnimy, że funkcja $\varphi : (a, n) \rightarrow (a - b_n, a - c_n)$ jest iniekcją. Zauważmy, że funkcja $\varphi' : (x, y) \rightarrow (x + b_{x-y}, x - y)$ pozwala odzyskać argument funkcji φ z wartości. Oznacza to, że każdej wartości odpowiada dokładnie najwyżej argument, a więc funkcja jest iniekcją, z czego wynika nierówność.