

 Zadanie 1. Zadanie 1. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x + y = xy, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

Autor zadania: Tomasz Kossakowski

Rozwiązanie: Niech

$$s = x + y, \quad p = xy.$$

Z pierwszego równania mamy $s = p$. Korzystając z tożsamości $x^2 + y^2 = s^2 - 2p$, otrzymujemy

$$s^2 - 2s = 10,$$

czyli

$$s^2 - 2s - 10 = 0.$$

Rozwiązujemy to równanie:

$$s = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 40}}{2} = 1 \pm \sqrt{11}.$$

Ponieważ $p = s$, mamy dwa przypadki:

$$(s, p) = (1 + \sqrt{11}, 1 + \sqrt{11}) \quad \text{lub} \quad (1 - \sqrt{11}, 1 - \sqrt{11}).$$

Liczby x i y są pierwiastkami równania kwadratowego (ze wzorów Viete'a)

$$t^2 - st + p = 0,$$

czyli

$$t^2 - st + s = 0.$$

Stąd

$$x, y = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4s}}{2} = \frac{s \pm \sqrt{s(s - 4)}}{2}.$$

Przypadek 1. $s = 1 + \sqrt{11}$

$$s(s - 4) = (1 + \sqrt{11})(-3 + \sqrt{11}) = 8 - 2\sqrt{11} = 2(4 - \sqrt{11}),$$

więc

$$x, y = \frac{1 + \sqrt{11} \pm \sqrt{2(4 - \sqrt{11})}}{2}.$$

Przypadek 2. $s = 1 - \sqrt{11}$

$$s(s - 4) = (1 - \sqrt{11})(-3 - \sqrt{11}) = 8 + 2\sqrt{11} = 2(4 + \sqrt{11}),$$

zatem

$$x, y = \frac{1 - \sqrt{11} \pm \sqrt{2(4 + \sqrt{11})}}{2}.$$

Oba przypadki dają rozwiązania rzeczywiste, ponieważ wyrażenia pod pierwiastkiem są dodatnie.

Odpowiedź:

$$(x, y) = \left(\frac{1 + \sqrt{11} \pm \sqrt{2(4 - \sqrt{11})}}{2}, \frac{1 + \sqrt{11} \mp \sqrt{2(4 - \sqrt{11})}}{2} \right),$$

lub

$$(x, y) = \left(\frac{1 - \sqrt{11} \pm \sqrt{2(4 + \sqrt{11})}}{2}, \frac{1 - \sqrt{11} \mp \sqrt{2(4 + \sqrt{11})}}{2} \right).$$

Każda para może być zamieniona miejscami, ponieważ układ jest symetryczny względem x i y . □

 **Zadanie 2.** Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych n takich, że

$$\varphi(n) = \frac{n}{2}.$$

Uwaga: Przez $\varphi(n)$ oznaczamy liczbę liczb całkowitych $0 < k < n$ takich, że $\text{NWD}(k, n) = 1$.

Autor zadania: Bartosz Trojanowski

Rozwiązanie: Udowodnimy, że warunki zadania są spełnione przez każdą potęgę dwójki. Rzeczywiście, wtedy $\text{NWD}(k, n) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy k jest nieparzyste, a w zbiorze $1, 2, \dots, n$ takich liczb jest dokładnie $\frac{n}{2}$.

Uwaga: Okazuje się, że potęgi dwójki są jedynymi liczbami spełniającymi tą zależność.