

Zadanie 1. Funkcje f i g są określone na zbiorze liczb rzeczywistych i spełniają układ równań

$$\begin{cases} f(x) + 2g(1-x) = x^2 \\ f(1-x) - g(x) = x^2 \end{cases} \quad (1)$$

Jakim wzorem wyraża się $f(x)$?

Źródło zadania: Międzynarodowy Konkurs Matematyczny KANGUR 2023 Student

Wybór zadania: Maja Chlewicka

Rozwiązanie: Podstawiamy $1-x$ za x w pierwszym równaniu

$$\begin{aligned} f(1-x) + 2g(1-(1-x)) &= (1-x)^2 \\ f(1-x) + 2g(x) &= (1-x)^2 \end{aligned}$$

Zatem nasz układ równań wygląda tak:

$$\begin{aligned} f(1-x) + 2g(x) &= (1-x)^2 \\ f(1-x) - g(x) &= x^2 \end{aligned}$$

Następnie odejmujemy jedno równanie od drugiego

$$\begin{aligned} f(1-x) + 2g(x) - f(1-x) + g(x) &= (1-x)^2 - x^2 \\ 3g(x) &= 1 - 2x + x^2 - x^2 \\ g(x) &= \frac{1-2x}{3} \end{aligned}$$

Zatem podstawiając pod 2 równanie mamy:

$$f(1-x) - (1-2x)/3 = x^2 \quad f(1-x) = x^2 + (1-2x)/3 \quad f(1-x) = (3x^2 + 1 - 2x)/3$$

Aby znaleźć $f(x)$ podstawiamy pod x w wyrażeniu $1-x$, w ten sposób uzyskamy:

$$\begin{aligned} f(1-(1-x)) &= \frac{3(1-x)^2 + 1 - 2(1-x)}{3} \\ f(x) &= \frac{3 - 6x + 3x^2 - 1 - 2 + 2x}{3} \\ f(x) &= \frac{3x^2 - 4x + 2}{3} \end{aligned}$$

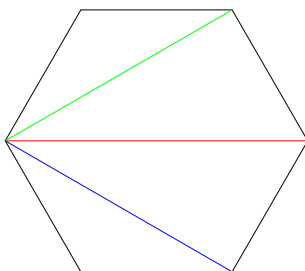
Odp:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 2}{3}$$

Zadanie 2. Dany jest 6-kąt foremny. Tosia i Mateusz grają w grę polegającą na prowadzeniu przekątnych – na przemian rysują przekątne łączące dwa wierzchołki, jednakże narysowane przez nich przekątne nie mogą się przecinać. Grę przegrywa osoba, który nie może wykonać ruchu. Grę rozpoczyna Tosia, ustal kto wygra grę i jaka jest strategia wygrywająca.

Autor zadania: Antonina Pajek

Rozwiązanie: Pokażemy że Tosia wygrywa grę i jaka jest jej strategia wygrywająca. Narysujmy sobie 6-kąt foremny. Jako że Tosia zaczyna grę to może sobie poprowadzić dowolną przekątną, więc aby wygrać poprowadzi przekątną zaznaczoną na rysunku na czerwono



Następnie Mateusz prowadzi jakąś dowolną przekątną (oczywiście nie przecinającą tej poprowadzonej wcześniej przez Tosię). Uznajmy więc że przekątną poprowadzoną przez Matusza jest przekątna niebieska. Zobaczmy że jeśli Mateusz może poprowadzić przekątną (która nie zapewnia wygranej Tosi) to Tosia ma pewność że może wykonać swój ruch, ponieważ wystarczy że będzie kopiować ruchy Mateusza odbite względem czerwonej przekątnej (np po poprowadzeniu przez Mateusza niebieskiej przekątnej Tosia prowadzi zieloną przekątną). Zatem widzimy że jeśli Mateusz ma możliwość wykonania ruchu to Tosia też ma taką możliwość, jednakże gracze wykonują skończoną liczbę ruchów (bo 6-kąt ma skończoną liczbę przekątnych) więc zawsze Mateusz przegra.