

 **Zadanie 1.** Udowodnij, że dla dowolnej liczby pierwszej $p > 3$ zachodzi

$$p^2 \mid \binom{p^2}{p} - \binom{p}{1}.$$

Bonus: Udowodnij, że powyższe wyrażenie jest podzielne przez wyższą potęgę p . Przez jaką najwyższą?

Autor zadania: Robert Rośczał

Rozwiązanie: Rozważmy wielomian $F(x) = x(x-1)\dots(x-p+2)$. Zauważmy, że:

$$\binom{p^2}{p} - \binom{p}{1} = \frac{p^2(p^2-1)\dots(p^2-p+1)}{p(p-1)\dots\cdot 1} - p = p \cdot \left(\frac{F(p^2-1) - F(p-1)}{F(p-1)} \right)$$

Pozostaje więc udowodnić, że wyrażenie w nawiasie jest podzielne przez p . Zauważmy, że . Przypomnijmy sobie znany lemat, że dla dowolnego wielomianu całkowitego P i liczb całkowitych a, b zachodzi $a - b \mid P(a) - P(b)$. W naszym przypadku $p \mid p^2 - p \mid F(p^2-1) - F(p-1)$. Ponadto $p \nmid F(p-1)$, więc p dzieli wyrażenie w nawiasie, co należało udowodnić.

 **Zadanie 2.** Udowodnij, że dla $a, b, c \in [0, 1]$ zachodzi nierówność

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq 1.$$

Autor zadania: Robert Rościzak

Rozwiązanie:

Rozwiązanie 1. Podstawmy $a = \sin^2 \alpha, b = \sin^2 \beta, c = \sin^2 \gamma$ dla kątów $\alpha, \beta, \gamma \in [0^\circ, 90^\circ]$. Możemy przekształcić

$$\sqrt{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma} + \sqrt{(1 - \sin^2 \alpha)(1 - \sin^2 \beta)(1 - \sin^2 \gamma)} \leq 1.$$

Z jedynki trygonometrycznej podstawiamy

$$\sqrt{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma} + \sqrt{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma} \leq 1,$$

$$|\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma| + |\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma| \leq 1,$$

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq 1.$$

Wiemy, że $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$. Rozważmy więc dwa przypadki:

a) gdy $\sin \gamma \leq \cos \gamma$.

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma &\leq \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \\ &= \cos \gamma (\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \gamma) = \cos \gamma \cos(\alpha - \beta) \leq 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

b) gdy $\cos \gamma < \sin \gamma$.

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma &< \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma = \\ &= \sin \gamma (\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \gamma) = \sin \gamma \cos(\alpha - \beta) \leq 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Zatem nierówność zachodzi dla dowolnych liczb $a, b, c \in [0, 1]$.

Rozwiązanie 2. Jako że $abc \in [0, 1]$, zachodzi nierówność $\sqrt{abc} \leq \sqrt[3]{abc}$. Możemy więc szacować (analogicznie dla drugiego iloczynu):

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq \sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)}.$$

Teraz możemy powołać się dwukrotnie na nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną:

$$\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq \frac{a+b+c}{3} + \frac{1-a+1-b+1-c}{3} = 1,$$

co należało właśnie udowodnić.