

Zadanie 1. Na bardzo nudnej lekcji w szkole Marek policzył włosy trzech kolegów siedzących przed nim w ławce. Zorientował się, że włosów ich dokładnie tyle ile wyrazów (mających sens lub nie) można ułożyć z przestawiania liter wyrazu OWŁOSIENIE. Ile włosów średnio ma każdy z kolegów Marka?

Autor zadania: Scarlett Lafa

Rozwiązanie: Gdyby wyraz OWŁOSIENIE miał wszystkie litery różne, wtedy można by z niego ułożyć $10!$ wyrazów. (Na pierwsze miejsce można wstawić 10 liter, na drugie 9, itd.). Ale nasz wyraz ma trzy litery, które powtarzają się każda po dwa razy. Dlatego aby otrzymać łączną liczbę włosów musimy podzielić $10!$ na $2! \cdot 2! \cdot 2!$. Dlaczego? Ponieważ przez każdą z liter O, I, E, każdy wyraz został policzony $2!$ razy. (Tzn. litera O może znajdować się w dwóch miejscach w wyrazie, więc policzyliśmy wszystkie wyrazy $2!$ razy).

Przykład dodatkowy: Dla słowa ALASKA gdyby wszystkie litery były różne mieliśmyby $6!$ możliwych wyrazów, ale A powtarza się 3 razy, więc $6!$ musimy podzielić na $3!$, ponieważ A może być na trzech miejscach w wyrazie i możemy “rozdzielić” nasze trzy A na $3!$ sposobów na te miejsca więc każde słowo z wyrazu ALASKA zostało policzone $3!$ razy.

Wracając do zadania:

$$\frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 453600.$$

Otrzymaliśmy łączną liczbę włosów, wystarczy teraz tylko policzyć średnią arytmetyczną.

$$\frac{453600}{3} = 151200$$

Odpowiedź: Średnio kolega Marka ma 151200 włosów.

 **Zadanie 2.** Niech a, b będą względnie pierwszymi dodatnimi liczbami całkowitymi. Parę $c \neq a, d \neq b$ dodatnich liczby całkowitych nazwiemy *superekstrahumanistycznohumańską*, jeśli zachodzi

$$a^2 + b^2 = ac + bd.$$

Wykazać, że dla każdej superekstrahumanistycznohumańskiej pary zachodzi nierówność $a + b < c + d$.

Autor zadania: Bartosz Trojanowski

Rozwiązanie: Niech c, d będzie superekstrahumanistycznohumańską parą. Jeśli zachodzą nierówności $c > a, d > b$ to $a + b < c + d$, więc załóżmy, że co najmniej jedna z tych nierówności jest nieprawdziwa. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $a \geq c$. Wtedy $c = a - k$ dla pewnej liczby całkowitej $k \geq 1$. Stąd mamy

$$a^2 + b^2 = ac + bd \implies b^2 + ak = bd.$$

Ponieważ liczby a i b są względnie pierwsze, to $b \mid k$, co daje $k \geq b$, czyli $c = a - k \leq a - b$. Stąd

$$a^2 + b^2 = ac + bd \leq a(a - b) + bd = a^2 - ab + bd \implies b^2 \leq -ab + bd \implies a + b \leq d.$$

Zatem $c + d > d \geq a + b$, co kończy dowód. 