

**Zadanie 1.** Wykaż, że jeśli dla dodatnich liczb całkowitych  $a$ ,  $b$  i  $c$  zachodzi  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = c$ , to  $a$  i  $b$  są kwadratami liczb całkowitych.

**Autor zadania:** Michał Fronczek

**Rozwiązanie:** Podnosząc zadane równanie stronami do kwadratu dostajemy

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = c^2$$

$$a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b = c^2$$

Mamy, że  $a$ ,  $b$  i  $c^2$  są całkowite, a zatem całkowite musi być też  $2\sqrt{a}\sqrt{b}$ , czyli  $\sqrt{a}\sqrt{b}$  jest wymierna.

Pomnóżmy teraz równanie z tezy przez  $\sqrt{a}$ . Dostajemy wtedy, że  $a + \sqrt{b}\sqrt{a} = c\sqrt{a}$ . Mamy natomiast z wcześniejszych obserwacji, że lewa strona jest wymierna, taka musi więc być i prawa. Jeśli jednak  $a$  nie jest kwadratem liczby całkowitej (nie może być kwadratem liczby wymiernej, bo  $a$  jest liczbą całkowitą), to wtedy  $c\sqrt{a}$  jest niewymierna. A zatem  $a$  musi być kwadratem liczby całkowitej.

Analogiczne rozumowanie przeprowadzamy dla  $b$  pokazując, że ono również jest kwadratem liczby całkowitej.

To kończy dowód

**Zadanie 2.** Liczby dodatnie  $x, y, z$  spełniają równość  $x + y + z = 1$  wykaż, że zachodzi

$$\frac{7 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 + 2 \cdot z^2}{2 \cdot (x + y)} + \frac{2 \cdot x^2 + 7 \cdot y^2 + 4 \cdot z^2}{2 \cdot (y + z)} + \frac{4 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 + 7 \cdot z^2}{2 \cdot (z + x)} > 3$$

**Autor zadania:** Michał Fronczek

**Rozwiązanie:** Pokażę, że każdy z trzech ułamków składających się na lewą stronę nierówności jest nie mniejszy od 1. Dowód przeprowadzę dla pierwszego ułamka, pozostałe dwa będą analogiczne.

Chcemy zatem pokazać, że

$$\frac{7 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 + 2 \cdot z^2}{2 \cdot (x + y)} > 1$$

Przemnażając nierówność stronami przez (dodatnie)  $2(x + y)$ , dostajemy

$$5 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 + 2 \cdot z^2 > 2 \cdot (x + y)$$

Mamy ponadto

$$\begin{aligned} 2(x + y) &= 2(x + y) \cdot 1 = 2(x + y) \cdot (x + y + z) = \\ &= 2(x^2 + y^2 + 2xy + yz + xz) = 2x^2 + 2y^2 + 4xy + 2yz + 2xz \end{aligned}$$

Podstawiając to zatem do dowodzonej nierówności mamy, że wystarczy pokazać, iż

$$\begin{aligned} 7 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 + 2 \cdot z^2 &> 2x^2 + 2y^2 + 4xy + 2yz + 2xz \\ 5 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 + 2 \cdot z^2 - 4xy - 2yz - 2xz &> 0 \\ 4 \cdot x^2 - 4xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + x^2 - 2xz + z^2 &> 0 \\ (2x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2 &> 0 \end{aligned}$$

Zachodzenie nieostrej nierówności ( $\geq$ ) oczywiście jest prawdą, gdyż kwadrat liczby rzeczywistej jest nie mniejszy od 0. Ponadto by zaszła w tej nierówności równość każdy z kwadratów, a więc i wyrażeń podniesionych do kwadratu musiało by być równe 0. Z drugiego i trzeciego kwadratu wynika stąd, że  $y = z = x$ , czyli w połączeniu z założeniem  $x + y + z = 1$  daje nam to, że  $x = y = z = \frac{1}{3}$ . to jest jednak sprzeczne z pierwszym kwadratem, który to wymusza  $y = 2x$ . A zatem równość zajść nie może i pozostaje nam ostra nierówność. A więc ta część nierówności została udowodniona.

Analogicznie dowodzimy to dla pozostałych dwóch ułamków, a to po zsumowaniu daje tezę.

To kończy dowód