

Zadanie 1. Na tablicy napisane są liczby $1, 2, 3, \dots, 2025$. Scarlett i Antoni grają w grę. Ruch polega na zamianie liczb:

$$(a, b, c) \longrightarrow (a + b - c, b + c - a, c + a - b).$$

Grę wygrywa gracz, po którego ruchu wszystkie liczby na tablicy będą jednakowe. Zaczyna Scarlett. Rozstrzygnij kto ma strategię wygrywającą.

Rozwiązanie: Pokażemy, że w tę grę nie da się wygrać.

Założmy nie wprost, iż się da. Zauważmy, że suma wszystkich liczb w dowolnym momencie gry jest stała, bowiem z liczb o sumie $a + b + c$ tworzymy liczby o sumie

$$a + b - c + b + c - a + c + a - b = a + b + c.$$

Wtedy suma wszystkich liczb to

$$\sum_{n=1}^{2025} n = \frac{1}{2} \cdot 2025 \cdot (2025 + 1) = 2025 \cdot 1013,$$

zatem chcemy, by wszystkie liczby na tablicy na końcu były równe 1013. Z drugiej jednak strony, suma kwadratów liczb na tablicy będzie się nie zmniejszać, co pokażemy poniższą nierównością. Z sumy kwadratów liczb $a^2 + b^2 + c^2$ tworzymy $(a + b - c)^2 + (b + c - a)^2 + (c + a - b)^2$, zatem

$$(a + b - c)^2 + (b + c - a)^2 + (c + a - b)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 0$$

Używając wzoru $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$ dostajemy:

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac) + (a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ac) + \\ & + (a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac) - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 0 \end{aligned}$$

Upraszczając:

$$2a^2 - 2ab + 2b^2 - 2ac - 2bc + 2c^2 = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0.$$

Jeżeli suma kwadratów jest niemalejąca, to najmniejsza możliwa suma to

$$\sum_{n=1}^{2025} n^2 = \frac{1}{6} \cdot 2025 \cdot 2026 \cdot 5051 = 3453747525,$$

a pożądana suma kwadratów to $2025 \cdot 1013^2 = 2077992225$, wtedy

$$\sum_{n=1}^{2025} n^2 > 2025 \cdot 1013^2,$$

co jest sprzecznością, bo $\sum_{n=1}^{2025} n^2$ miało być najmniejszą sumą kwadratów. ■

Zadanie 2. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x, y, z takich, że $(x + y)(y + z)(z + x) \neq 0$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{(1 + x^2)(1 + y^2)}{2(x + y)} + \frac{(1 + y^2)(1 + z^2)}{2(y + z)} + \frac{(1 + z^2)(1 + x^2)}{2(z + x)} \geq x + y + z.$$

Autor zadania: Bartosz Trojanowski

Rozwiązanie: Zauważmy, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b zachodzi

$$(1 + a^2)(1 + b^2) \geq (a + b)^2.$$

Rzeczywiście, mnożąc wszystkie nawiasy dostajemy nierówność $1 + a^2b^2 \geq 2ab$ prawdziwą dla dowolnych a, b . Stąd

$$\frac{(1 + x^2)(1 + y^2)}{2(x + y)} \geq \frac{(x + y)^2}{2(x + y)} = \frac{x + y}{2}.$$

Podobnie ograniczamy pozostałe dwa ułamki. Dodając stronami wszystkie uzyskane zależności dostajemy tezę. ■