

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n takie, że liczba

$$\frac{2^n}{n+1}$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Bonus: Niech A będzie zbiorem wszystkich dodatnich liczb całkowitych $n > 2025$ takich, że liczba

$$\frac{2^n}{n+1}$$

jest kwadratem liczby całkowitej oraz niech B będzie zbiorem wszystkich dodatnich liczb całkowitych $n > 2025$ takich, że liczba

$$\frac{2^{2^n}}{n+1}$$

jest kwadratem liczby całkowitej. Wykazać, że zbiory A oraz B są rozłączne.

Autor zadania: Bartosz Trojanowski

Rozwiązanie: Ponieważ liczba $\frac{2^n}{n+1}$ jest całkowita, to $n+1 \mid 2^n$. Stąd wynika, że $n+1$ jest potęgą dwójki. Niech $n+1 = 2^x$. Wtedy

$$\frac{2^n}{n+1} = \frac{2^{2^x-1}}{2^x} = 2^{2^x-x-1}.$$

Liczba ta jest kwadratem jedynie gdy liczba $2^x - x - 1$ jest parzysta i nieujemna. Stąd wniosek, że x jest nieparzyste. Ponadto $2^x \geq x+1$ dla $x > 0$, więc szukane liczby to liczby postaci $n = 2^{2^k+1} - 1$, gdzie $k \geq 0$ jest dowolną liczbą całkowitą. ■

Rozwiązanie bonusu: Jeśli istnieje takie n , że obie liczby $\frac{2^n}{n+1}$ oraz $\frac{2^{2^n}}{n+1}$ są kwadratami, to kwadratem również jest ich iloczyn. Jest on równy

$$\frac{2^n \cdot 2^{2^n}}{(n+1)^2} = \frac{2^{2^n+n}}{(n+1)^2}.$$

Stąd wniosek, że liczba 2^{2^n+n} jest kwadratem, czyli liczba 2^n+n jest parzysta, czyli n jest parzyste. Jednak jak udowodniliśmy wcześniej, liczba $\frac{2^n}{n+1}$ jest kwadratem wyłącznie dla parzystych n , co kończy dowód. ■

Zadanie 2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Niech D, E, F będą spodkami wysokości z wierzchołków odpowiednio A, B, C . Na boku BC leży punkt K . Niech punkt L będzie przecięciem EF i AK . Wykazać, że środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leży na odcinku AK wtedy i tylko wtedy, gdy $\angle ELA$ jest prosty.

Autor zadania: Tomasz Kossakowski

Rozwiązanie: Niech punkt przecięcia wysokości to H . Oznaczmy $\angle BAD = \alpha$. Na czworokącie $AFHE$ możemy opisać okrąg, gdyż $\angle AFH + \angle AEH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Wtedy $\angle BAD = \angle FAH = \angle FEH = \alpha$. Punkty O i H są izogonalnie sprzężone, zatem O leży na AK wtedy i tylko wtedy, gdy $\angle BAH = \angle OAC = \alpha$. Wtedy $\angle LEH = 90^\circ - \alpha$, czyli $\angle ELA = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - \alpha = 90^\circ$. ■

