



Zadanie 1. Dany jest okrąg o_1 o środku O oraz jego średnica MN . Punkt P leży na tym okręgu, prosta NP przecina w punkcie Q prostą k prostopadłą do średnicy MN przechodzącą przez środek okręgu. Punkt P' jest odbiciem punktu P względem prostej k , zaś punkt Q' to punkt przecięcia prostej NP' z prostą k . Wiedząc, że promień okręgu o_1 ma długość r , wyznacz iloczyn $OQ' \cdot OQ$ w zależności od długości promienia.

Autor zadania: Maria Janyska

Rozwiązanie:

Pokażemy, że poszukiwany iloczyn wynosi R^2 .

Skoro MN to średnica, to oparte na niej kąty są proste, w tym $\sphericalangle MPN$. Ponadto z symetrii w okręgu o_1 wynika, że prosta MP przechodzi przez punkt Q' , punkty P, Q', M są współliniowe. Można przenieść po łuku MP' kąty: $\sphericalangle ONQ' = \sphericalangle MNP' = \sphericalangle MPP'$, z kolei $\triangle Q'PQ$ jest prostokątny o wysokości opuszczonej z wierzchołka przy kącie prostym PP' , co daje nam równość kątów $\sphericalangle MPP' = \sphericalangle Q'PP' = \sphericalangle PQQ'$.

Mamy więc równości kątów $\sphericalangle ONQ' = \sphericalangle OQN$ oraz wspólny kąt prosty $\sphericalangle NOQ$ dla $\triangle Q'ON$ i $\triangle NOQ$, co daje podobieństwo tych trójkątów z równości kątów. Możemy więc zapisać odpowiednie stosunki długości podstaw:

$$\frac{ON}{OQ'} = \frac{OQ}{ON}$$

$$OQ' \cdot OQ = ON \cdot ON = R^2,$$

co należało obliczyć.



Zadanie 2. Dana jest liczba całkowita dodatnia n . Wykazać, że istnieje okrąg w układzie współrzędnych, wewnątrz którego jest dokładnie n punktów kratowych (tzn. punktów o obu współrzędnych całkowitych).

Źródło: Magazyn *delta* nr 1 2019

Rozwiązanie: Każde dwa różne punkty kraty $\mathbb{Z}^2$ mają różne odległości od punktu $w = (\sqrt{2}, \frac{1}{3})$, tj. nie ma okręgu o tym środku przechodzącego przez dwa lub więcej punktów kraty.

Istotnie, niech $a = (a_x, a_y)$, $b = (b_x, b_y) \in \mathbb{Z}^2$ i $a \neq b$. Jeżeli $|a - w| = |b - w|$, to

$$(a_x - \sqrt{2})^2 + \left(a_y - \frac{1}{3}\right)^2 = (b_x - \sqrt{2})^2 + \left(b_y - \frac{1}{3}\right)^2,$$

czyli

$$a_x^2 - a_y^2 - b_x^2 + b_y^2 - \frac{2}{3}(a_y - b_y) = 2(a_x - b_x)\sqrt{2}.$$

Prawa strona jest więc liczbą wymierną, zatem $a_x = b_x$, ale wówczas

$$a_y^2 - b_y^2 - \frac{2}{3}(a_y - b_y) = (a_y - b_y)\left(a_y + b_y - \frac{2}{3}\right) = 0.$$

Jest to możliwe jedynie, gdy $a_y = b_y$. Zatem $a = b$, sprzeczność. Krata $\mathbb{Z}^2$ jest zbiorem przeliczalnym, więc korzystając z powyższej obserwacji, wszystkie jej elementy możemy ustawić w ciąg

$$\mathbb{Z}^2 = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \text{ tak, że } |a_i - w| < |a_{i+1} - w| \text{ dla } i = 1, 2, \dots$$

Wówczas koło otwarte

$$x \in \mathbb{R}^2 : |x - w| < |a_{n+1} - w|$$

zawiera wszystkie punkty kratowe $a_1, a_2, \dots, a_n$ i żadnych innych.