



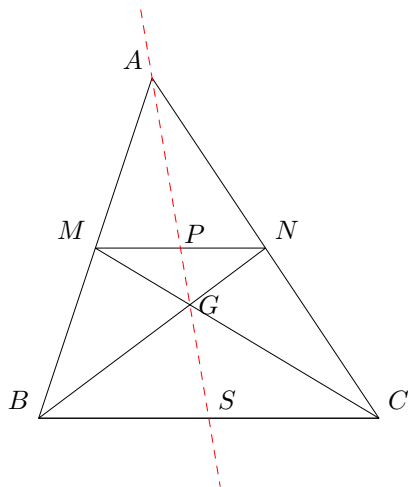
Zadanie 1. Dany jest trójkąt ABC . Oznaczmy przez M i N środki kolejno boków AB i AC . Niech ponadto P będzie środkiem odcinka MN . Oznaczmy przez G środek ciężkości $\triangle ABC$. Wykaż, że punkty A , P i G są współliniowe.
Uwaga! Środek ciężkości trójkąta definiujemy jako przecięcie jego środkowych

Autor zadania: Michał Fronczek

Rozwiązanie: Oznaczmy przez S środek odcinka BC . Wiemy zatem, że AS jest środkową w $\triangle ABC$, według swojej definicji leży na niej punkt G . A zatem A, G i S są współliniowe. Możemy zatem pozbyć się z naszej tezy G i udowodnić, że P również leży na środkowej AS .

Zauważmy, że $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$, a ponadto półproste AB i AC mają wspólny punkt A , a zatem z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa otrzymujemy, że odcinki MN i BC są równoległe. Ponadto $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$. Teraz z definicji

punktów P i S mamy, że $\frac{MP}{BS} = \frac{\frac{1}{2}MN}{\frac{1}{2}BC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2} = \frac{AM}{AB}$. Ponadto MP i BS są równoległe, bo są to odcinki na równoległych prostych MN i BC , a zatem ponownie z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa dostajemy, że faktycznie punkty A , P i S są współliniowe. To zaś jak już wiemy kończy dowód.





Zadanie 2. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że liczba $p^4 + 4^p$ też jest pierwsza.

Autor zadania: Michał Fronczek

Rozwiązanie: Będziemy rozważać naszą liczbę z punktu widzenia reszt z dzielenia przez 5. Sprawdzimy najpierw co się dzieje, gdy p jest parzyste. Jedyną liczbą pierwszą parzystą jest 2, a zatem $p = 2$. Wtedy jednak наша liczba z tezy jest równa 32, co oczywiście nie jest pierwsze. Zatem p musi być nieparzysta. Rozważmy jeszcze przypadek, gdy 5 dzieli p . Wiemy jednak, że p jest pierwsza, a zatem $p = 5$. Podstawiając tak otrzymany wynik do wyrażenia z tezy dostajemy, że jest ono równe 1649. Mamy natomiast $1649 = 17 \cdot 97$, więc nie jest ona pierwsza. A zatem 5 nie dzieli p . Jeśli teraz p daje resztę 1 z dzielenia przez 5, to $p = 5k + 1$ i $p^4 = 625k^4 + 500k^3 + 150k^2 + 20k + 1$, a zatem daje resztę 1 z dzielenia przez 5. Podobnie rozpisując dla p dającego reszty 2, 3, 4 z dzielenia przez 5 za każdym razem okazuje się, że zawsze p^4 daje resztę 1. Podnosząc 4 do kolejnych potęg okazuje się, że daje ono na przemian reszty 1 i 4. Mamy bowiem, że 4 daje resztę 4, $4^2 = 16$ daje resztę 1, $4^3 = 64$ daje znowu resztę 4 itd. W szczególności reszta 4 przyjmowana jest dla nieparzystych wykładników. My zaś wiemy, że p jest nieparzysta, a zatem 4^p daje właśnie resztę 4 z dzielenia przez 5. Łącząc teraz poprzednie wyniki dochodzimy do wniosku, że liczba $p^4 + 4^p$ daje resztę $1 + 4 = 5$ czyli 0 z dzielenia przez 5, a zatem jest przez 5 podzielna. Wiemy natomiast, że $p^4 + 4^p \geq 3^4 + 4^3 = 145 > 5$, nie może więc być pierwsza, gdyż ma dzielnik pierwszy mniejszy od samej siebie. Tym samym przeszliśmy przez wszystkie przypadki i w żadnym nie znaleźliśmy szukanej liczby p . Nie może więc ona istnieć.