



Zadanie 1. Niech czworokąt $ABDC$ będzie wpisany w okrąg oraz niech X to punkt przecięcia jego przekątnych. Udowodnij, że

$$AB \cdot AC < AX \cdot (BC + AD).$$

Autor zadania: Tomasz Kossakowski

Rozwiązanie: Z nierówności trójkąta wiemy, że

$$AB < AX + XB \quad \text{oraz} \quad AC < AX + XC.$$

Przemnażając te nierówności stronami (gdzie wszystko jest dodatnie) otrzymujemy

$$AB \cdot AC < (AX + XB) \cdot (AX + XC) = AX^2 + AX \cdot XB + AX \cdot XC + BX \cdot XC.$$

Zobaczmy, czym jest potęga punktu:

Definicja 1 (potęga punktu)

Potęga punktu A względem okręgu o o środku O i promieniu r jest liczbą określoną wzorem:

$$P(A, o) = |AO|^2 - r^2,$$

gdzie $|AO|$ to odległość punktu A od środka okręgu O , a r to promień okręgu.

Z tej definicji można otrzymać ciekawe właściwości.

Twierdzenie 1 (właściwości potęgi punktu)

- $P(A, o) > 0$ dla punktu A leżącego na zewnątrz okręgu,
- $P(A, o) = 0$ dla punktu A leżącego na okręgu,
- $P(A, o) < 0$ dla punktu A leżącego wewnątrz okręgu.

Twierdzenie 2 (właściwości potęgi punktu)

Niech A będzie dowolnym punktem, a k prostą przechodzącą przez A , która przecina okrąg o w punktach B i C . Wówczas:

$$P(A, o) = |AB| \cdot |AC|.$$

Jeśli A leży na zewnątrz okręgu, to $P(A, o) = |AB| \cdot |AC|$; jeśli A leży wewnątrz okręgu, to $P(A, o) = -|AB| \cdot |AC|$.

Jeśli D jest punktem styczności prostej k z okręgiem, to:

$$P(A, o) = |AD|^2.$$

Oznacza to, że w naszym zadaniu

$$AX \cdot XD = BX \cdot XC.$$

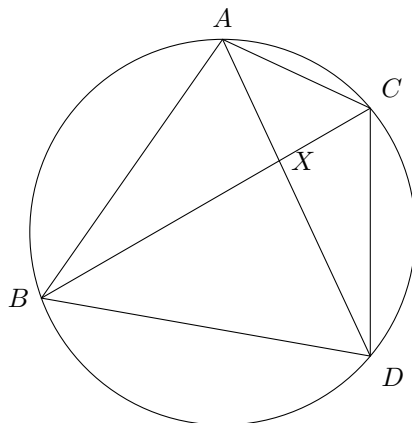
Podstawiając do nierówności:

$$AX^2 + AX \cdot XB + AX \cdot XC + BX \cdot XC = AX^2 + AX \cdot XB + AX \cdot XC + AX \cdot XD,$$

czyli

$$AB \cdot AC < AX \cdot (AX + XD + BX + XC) = AX \cdot (AD + BC),$$

co należało wykazać. ■





Zadanie 2. Nieskończony ciąg $a_1, a_2, \dots$ dodatnich liczb całkowitych nazywamy *buldożerskim*, jeśli spełnia warunek:

$$a_i \mid a_j \iff j \mid i$$

dla każdej pary dodatnich liczb całkowitych (i, j) . Zbadać, czy istnieje buldożerski ciąg.

Autor zadania: Bartosz Trojanowski

Rozwiązanie: Przypuśćmy, że a_n jest buldożerskim ciągiem. Zauważmy, że $i \mid 2i$ dla każdego i , więc

$$\dots \mid a_4 \mid a_2 \mid a_1 \implies a_1 \geq a_2 \geq a_4 \geq \dots$$

Ponieważ $a_i \geq 1$ dla każdego i , to ciąg $a_1, a_2, a_4, a_8, \dots$ jest od pewnego momentu stały. Weźmy λ tak duże, że $a_{2^\lambda} = a_{2^{\lambda+1}}$. Zauważmy, że

$$2^\lambda \mid 3 \cdot 2^\lambda \implies a_{3 \cdot 2^\lambda} \mid a_{2^\lambda} = a_{2^{\lambda+1}} \implies 2^{\lambda+1} \mid 3 \cdot 2^\lambda,$$

co daje sprzeczność i kończy dowód. ■