



**Zadanie 1.** Udowodnij, że dla  $x > 0$  zachodzi

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+5} \leq 2\sqrt{x+3}.$$

**Autor zadania:** Tomasz Kossakowski

**Rozwiązanie:** Niech  $a = x + 1$  oraz  $b = x + 5$ . Podstawmy do lewej strony nierówności:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+5} = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Zauważmy również, że

$$\frac{a+b}{2} = \frac{x+1+x+5}{2} = x+3.$$

Ponieważ  $x > 0$ , to  $x+5 > x+1 > 0$ , zatem  $(\sqrt{a})^2 = a$  oraz  $(\sqrt{b})^2 = b$ .  
Wtedy nasza nierówność przybiera postać:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 2\sqrt{\frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2}{2}},$$

co jest spełnione na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i kwadratową. ■

Dla przypomnienia:

**Twierdzenie 1** (nierówność między średnią arytmetyczną i kwadratową)

Dla dowolnych liczb  $n \in \mathbb{Z}_+$  oraz  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  zachodzi

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

przy czym równość występuje wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n.$$



**Zadanie 2.** Niech  $M$  będzie dowolnym punktem wewnątrz wysokości  $AD$  w trójkącie  $ABC$ . Prosta równoległa do  $AB$  przechodząca przez  $M$  przecina wysokość  $CF$  w  $P$ . Prosta równoległa do  $AC$  przechodząca przez  $M$  przecina wysokość  $BE$  w  $Q$ . Udowodnić, że proste  $PQ$  i  $EF$  są równoległe.

**Autor zadania:** Bartosz Trojanowski

**Rozwiązanie:** Niech  $H$  będzie ortocentrum  $ABC$ . Kąty  $\sphericalangle MPH$  i  $\sphericalangle MQH$  są proste, więc punkty  $M, P, Q, H$  leżą na okręgu o średnicy  $MH$ . Kąty  $\sphericalangle AEH$  i  $\sphericalangle AFH$  są proste, więc punkty  $A, E, F, H$  leżą na okręgu o średnicy  $AH$ . Stąd

$$\sphericalangle MPQ = \sphericalangle MHQ = \sphericalangle AHE = \sphericalangle AFE,$$

co kończy dowód, bo  $AF \parallel MP$ . ■

