



Zadanie 1. Jacek ma swój ogródek. Znajduje się w nim 15 kwiatków w doniczkach ułożonych na jednej prostej w odstępach 1 m. Ponadto na tej samej prostej, przed wszystkimi kwiatami, w odstępie 2 m od pierwszego znajduje się studnia z wodą. Jacek ma do dyspozycji konewkę o pojemności 5 ℓ , którą napełnia ze studni po czym podlewa nią kwiatki w dowolnej, wybranej przez siebie kolejności, pod każdy kwiat po 1 ℓ . Na przeniesienie 1 ℓ wody przez 1 m Jacek zużywa 1 J energii. Zaczyna ze studni napełniając konewkę do pełna, a następnie podlewa nią kolejno 5 kwiatków. Gdy skończy mu się woda wraca z powrotem do studni. Proces powtarza aż do podlania wszystkich kwiatów. Jacek jest leniem, więc chce na noszeniu wody stracić jak najmniej energii (noszenie samej konewki pomijamy). Podaj minimalną liczbę dzuli, którą zużyje Jacek oraz zaplanuj dla niego przykładową trasę, by jego marzenie się spełniło.

Autor zadania: Michał Fronczek

Rozwiązanie: Załóżmy istnienie przeznaczenia i przypiszmy każdemu litrowi wody kwiat, do którego w toku podlewania trafi. W takim razie zamiast patrzeć na ruchy całej konewki możemy spojrzeć na dany transportowany w niej litr. Sprzyja temu fakt, że liczbę zużytych dzuli liczymy nie bezpośrednio z konewki, a z liczby znajdującej się w niej litrów wody, które możemy zatem traktować jako osobne „byty”. W trakcie swojej podróży przebędzie taki litr jakąś drogę, którą przepisze mu Jacek, ale zawsze zacznie ją u studni i zakończy w swoim kwiatku. Najmniejsza przy tym droga, którą musi pokonać do odcinek pomiędzy tymi punktami. Rozumowanie to możemy powtórzyć dla każdego takiego litra. Otrzymamy zatem, że minimalna liczba dzuli, którą w teorii może zużyć Jacek (piszę „w teorii”, gdyż nie wiem na razie czy jest to fizycznie możliwe, tzn. czy istnieje trasa, która to spełni) to suma odległości każdego kwiatka od studni. Pierwszy jest oddalony od studni o 2 m, zaś najdalszy (15-ty) o 16 m, każde pozostałe odległości to liczby całkowite pomiędzy tymi wartościami, więc ich suma to

$$2 + 3 + \dots + 16 = 1 + 2 + 3 + \dots + 16 - 1 = \frac{16 \cdot (16 + 1)}{2} - 1 = 135.$$

Zatem Jacek zużyje minimum 135 J. Pozostaje pokazać, że istnieje trasa, która pozwala na osiągnięcie tego wyniku. O to jedna z nich:

„Po i -tym napełnieniu konewki u studni Jacek idzie od $5i - 4$ -tego kwiatka, po czym zaczynając od niego podlewa kolejno kwiatki o numerach $5i - 4$, $5i - 3$, $5i - 2$, $5i - 1$ oraz $5i$ ”

Bezpośredni sprawdzenie pokazuje, że ta trasa działa.

Zatem odpowiedź to 135 J.



Zadanie 2. Znajdź wielomian o współczynnikach całkowitych, którego pierwiastkiem jest $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

Autor zadania: Michał Fronczek

Rozwiązanie: W moim rozwiązaniu skonstruuję żądany wielomian zaczynając od $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ i następnie wykonując na nim działania dodawania i podnoszenia stronami do potęgi, by przekształcić początkowe równanie w wielomian o współczynnikach całkowitych, przy zachowaniu chcianego pierwiastka.

Pokażę najpierw, że dodawanie stronami i podnoszenie równania stronami do potęgi zachowują dotychczasowe pierwiastki:

1. Jeśli x spełnia równanie $f(t) = g(t)$, to będzie też spełniał $f(t) + h(t) = g(t) + h(t)$, bo $h(t)$ można równoważnie skrócić wracając do pierwotnej postaci i założenia x jest wtedy pierwiastkiem tak otrzymanego równania, więc jest także pierwiastkiem równania z tezy;

2. Jeśli x spełnia równanie $f(t) = g(t)$, to będzie też spełniał $f(t)^n = g(t)^n$, bo to równanie jest równoważne $f(t)^n - g(t)^n = 0$, ale lewa strona tego równania jest na mocy wzorów skróconego mnożenia na różnicę tych samych potęg podzielna przez $f(t) - g(t)$, którego pierwiastkiem jest nasz x , zatem jest on też pierwiastkiem równania z tezy.

Jeśli zatem x jest pierwiastkiem początkowego równania, to w toku moich przekształceń ta własność się zachowa.

Przejdźmy zatem do wyznaczenia naszego wielomianu:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} \\ x - \sqrt{2} &= \sqrt[3]{3} \\ (x - \sqrt{2})^3 &= \sqrt[3]{3}^3 \\ x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot x \cdot \sqrt{2}^2 - \sqrt{2}^3 &= 3 \\ x^3 - 3x^2\sqrt{2} + 6x - 2\sqrt{2} &= 3 \\ x^3 + 6x - 3 &= \sqrt{2} \cdot (3x^2 + 2) \\ [x^3 + 6x - 3]^2 &= [\sqrt{2} \cdot (3x^2 + 2)]^2 \\ x^6 + 36x^2 + 9 + 12x^4 - 6x^3 - 36x &= 18x^4 + 24x^2 + 8 \\ x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 9 &= 0 \end{aligned}$$

Wiemy, że x jest tego pierwiastkiem, zatem jeden z szukanych wielomianów to $W(x) = x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 9$.