



Zadanie 1. Udowodnić, że nie istnieje dodatnia liczba całkowita $n > 3$ o następującej własności: liczba $n + 2k$ jest liczbą pierwszą dla każdego $0 \leq k < n$.

Autor zadania: Bartosz Trojanowski

Rozwiązanie: Przypuśćmy, że taka liczba istnieje. Z założenia wynika, że liczba $n + 2(n - 3)$ jest pierwsza. Zauważmy jednak, że

$$n + 2(n - 3) = 3n - 6 = 3(n - 2),$$

zatem liczba ta jest podzielna przez 3. Jest to możliwe jedynie, gdy $3n - 6 = 3$, czyli $n = 3$. Jednak $n > 3$, co daje sprzeczność. ■



Zadanie 2. Udowodnij, że

$$\left\lfloor \sum_{n=4}^{13} \sqrt{n} \right\rfloor = 28$$

nie przybliżając wartości poszczególnych pierwiastków.

Uwaga: Za poprawny dowód

$$28 \leq \sum_{n=4}^{13} \sqrt{n} \quad \text{lub} \quad \sum_{n=4}^{13} \sqrt{n} < 29$$

można otrzymać 2 punkty.

Autor zadania: Tomasz Kossakowski

Rozwiązanie: Musimy pokazać, że

$$23 < \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{8} + \sqrt{10} + \sqrt{11} + \sqrt{12} + \sqrt{13} < 24.$$

Używając tożsamości

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}$$

możemy zauważyć, że

$$\sqrt{34} = \sqrt{18 + 2\sqrt{64}} < \sqrt{5} + \sqrt{13} = \sqrt{18 + 2\sqrt{65}} < \sqrt{18 + 2\sqrt{81}} = 6$$

$$\sqrt{34} = \sqrt{18 + 2\sqrt{64}} < \sqrt{6} + \sqrt{12} = \sqrt{18 + 2\sqrt{72}} < \sqrt{18 + 2\sqrt{81}} = 6$$

$$\sqrt{34} = \sqrt{18 + 2\sqrt{64}} < \sqrt{7} + \sqrt{11} = \sqrt{18 + 2\sqrt{77}} < \sqrt{18 + 2\sqrt{81}} = 6$$

$$\sqrt{34} = \sqrt{18 + 2\sqrt{64}} < \sqrt{8} + \sqrt{10} = \sqrt{18 + 2\sqrt{80}} < \sqrt{18 + 2\sqrt{81}} = 6.$$

Wystarczy pokazać, że $\frac{23}{4} < \sqrt{34}$:

$$34 \cdot 16 = 544 > 529 = 23^2.$$

Dodajemy stronami oraz dodajemy brakujące $\sqrt{4}$ i $\sqrt{9}$, co kończy dowód. ■



Zadanie 3. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n o następującej własności: istnieje nieskończenie wiele ciągów liczb całkowitych dodatnich spełniających

$$a_1 + a_2^2 + \dots + a_n^n = na_1 + (n-1)a_2 + \dots + a_n.$$

Autor zadania: Bartosz Trojanowski

Rozwiązanie: Udowodnimy, że każda taka liczba n spełnia warunki zadania. Ustalmy n i weźmy pod uwagę dowolną liczbę a_i , gdzie $i > 1$. Dobierzmy ją tak, aby była podzielna przez $n-1$ oraz dostatecznie duża, by liczba $a_i^i - (n-i+1)a_i$ była dodatnia. Warunek z treści możemy przepisać jako

$$\sum_{k=2}^n \left(a_k^k - (n-k+1)a_k \right) = (n-1)a_1.$$

Każdy składnik sumy po lewej stronie jest podzielny przez $n-1$, więc cała suma też. Zatem istnieje takie a_1 . Pozostaje zauważyć, że każdą liczbę a_i możemy zwiększać w nieskończoność zachowując wcześniejsze założenia, więc można je wybrać na nieskończenie wiele sposobów. ■