



Zadanie 1. Niech E będzie dowolnym punktem na boku CD kwadratu $ABCD$. Odcinki AC i BE przecinają się w F . Udowodnić, że ortocentrum trójkąta ADF oraz punkty A, B, F leżą na jednym okręgu.

Uwaga! Ortocentrum trójkąta to miejsce przecięcia jego wysokości, a dowolne 4 punkty X, Y, Z, T leżą na jednym okręgu (w tej właśnie kolejności) wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle XYZ + \sphericalangle XTZ = 180^\circ$ lub gdy $\sphericalangle XZY = \sphericalangle XTY$.

Autor zadania: Bartosz Trojanowski

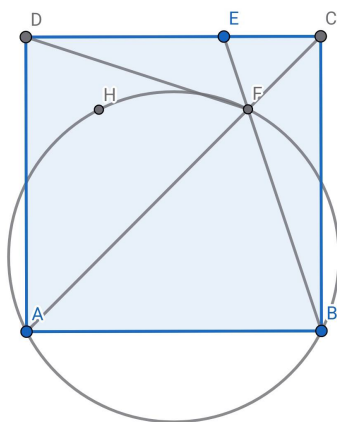
Rozwiązanie: Niech H będzie danym ortocentrum. Proste AC, BD są z definicji prostopadłe, więc H leży na BD . Również z definicji proste FH i AD są prostopadłe. Zatem

$$\sphericalangle ABH = \sphericalangle ABD = 45^\circ,$$

a także

$$\sphericalangle AFH = 90^\circ - \sphericalangle DAF = 45^\circ,$$

co kończy dowód. ■





Zadanie 2. Udowodnij, że dla całkowitego $n > 1$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^{in}} = \frac{1}{n^n} + \frac{1}{n^{2n}} + \frac{1}{n^{3n}} + \dots = \frac{1}{(n-1)(n^{n-1} + n^{n-2} + n^{n-3} + \dots + n + 1)}.$$

Autor zadania: Tomasz Kossakowski

Rozwiązanie: Niech $n^n = k$. Przekształćmy tezę – użyjmy wzoru skróconego mnożenia:

$$(n-1)(n^{n-1} + n^{n-2} + n^{n-3} + \dots + n + 1) = n^n - 1 = k - 1.$$

Zostaje pokazać, że

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k^i} = \frac{1}{k-1}.$$

Zauważmy, że

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{k^i} = \frac{k^{m-1}}{k^m} + \frac{k^{m-2}}{k^m} + \dots + \frac{1}{k^m} = \frac{1}{k^m} \sum_{i=0}^{m-1} k^i.$$

Pokażemy indukcyjnie, że

$$(k-1) \sum_{i=0}^{m-1} k^i = k^m - 1.$$

Przypomnijmy czym jest Zasada Indukcji Matematycznej (*Matematyka olimpijska – Algebra i teoria liczb*, Adam Neugebauer, wyd. ze stycznia 2018 r.):

Niech $X \subseteq \mathbb{N}$ będzie podzbiorem zbioru liczb naturalnych. Załóżmy, że spełnione są warunki:

$$(B): 1 \in X$$

$$(I): k \in X \implies k+1 \in X$$

Wówczas $X = \mathbb{N}$.

[Baza indukcyjna] Sprawdźmy, czy dla $m=1$ zależność działa:

$$(k-1) \cdot 1 = k-1 \quad (\text{działa}).$$

[Założenie indukcyjne] Załóżmy, że dla pewnego m teza działa. Wówczas:

$$(k-1) \sum_{i=0}^{m-1} k^i = k^m - 1.$$

[Krok indukcyjny] Teza brzmi:

$$(k-1) \sum_{i=0}^m k^i = k^{m+1} - 1.$$

Z założenia:

$$(k-1) \sum_{i=0}^m k^i = (k-1) \sum_{i=0}^{m-1} k^i + (k-1) \cdot k^m = k^m - 1 + (k-1) \cdot k^m = k^{m+1} - 1.$$

Teza została udowodniona. □

Wtedy

$$\sum_{i=0}^{m-1} k^i = \frac{k^m - 1}{k - 1}$$

oraz

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{k^i} = \frac{1}{k^m} \cdot \frac{k^m - 1}{k - 1} = \frac{1 - \frac{1}{k^m}}{k - 1}.$$

Kiedy m dąży do nieskończoności, możemy to zapisać jako:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{k^m}}{k - 1}.$$

Zapis $\lim$ oznacza granicę, zakładamy, że coś do czegoś dąży (tutaj: m dąży do nieskończoności). Zauważ, że kiedy m rośnie, wtedy $\frac{1}{k^m}$ maleje. Gdy $m \rightarrow \infty$, wtedy $\frac{1}{k^m} \rightarrow 0$. Dlatego:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{k^m}}{k - 1} = \frac{1}{k - 1}.$$

Co kończy dowód. ■