



Zadanie 1. Ile jest liczb naturalnych mniejszych od 2025, które są podzielne przez 3 i 4, ale nie są podzielne przez 5?

Źródło: konkurs AGH 3 etap 2024/2025

Wybór zadania: Antonina Pajek

Rozwiązanie: Zobaczmy, że jeśli liczba ma być podzielna przez 3 i 4 to musi być podzielna przez 12. Analogicznie, aby liczba nie była podzielna przez 3, 4 i 5 to nie może być podzielna przez 60, zatem odpowiedzią do zadania będzie liczba liczb podzielnych przez 12 - liczba liczb podzielanych przez 60.

Wyznamy największą liczbę (mniejszą od 2025) podzielna przez 12. Z racji, że $2024 \equiv 8 \pmod{12}$ to szukaną liczbą jest 2016. Zatem $\frac{2016}{12} = 168$ - czyli tyle jest liczb podzielnych przez 12 i mniejszych od 2025.

Teraz wyznaczmy największą liczbę (mniejszą od 2025) podzielną przez 60. Postępując analogicznie jak wyżej otrzymujemy, że szukana liczba jest 1980. Zatem $\frac{1980}{60} = 33$ - tyle jest liczb podzielnych przez 60 i mniejszych od 2025.

Teraz obliczając różnicę otrzymuje : $168 - 33 = 135$
(w rozwiązaniu 0 nie zostało przyjęte za liczbę naturalną)



Zadanie 2. Dana jest dodatnia liczba całkowita n . Udowodnij, że liczba $n^3 + 3n$ nie jest sześcianiem liczby całkowitej.

Źródło: II Facebookowe Kółko OMJ 2024 “wstawianie między kwadraty”
przykład drugi

Wybór zadania: Antonina Pajek

Rozwiązanie: Zauważmy, że na mocy wzoru na sześćcian sumy zachodzą nierówności:

$$n^3 < n^3 + 3n < n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n + 1)^3$$

W rezultacie rozważana liczba znajduje się pomiędzy dwoma kolejnymi sześcianami, czyli nie jest sześcianiem liczby całkowitej.