



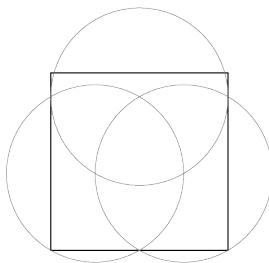
Zadanie 1. Znajdź największą taką liczbę całkowitą n , że mając 3 koła o promieniu 1 da się pokryć $n\%$ powierzchni kwadratu o boku 2.

Źródło: https://artofproblemsolving.com/community/c6t41772f6h3379823_three_discs_of_radius_1_cannot_cover_entirely_a_square_surface_of_side_2

Wybór zadania: Robert Rościak

Rozwiązanie: Zauważmy, że trzy okręgi nigdy nie przykryją całego kwadratu. Jest tak ponieważ każde z kół może przykryć maksymalnie jeden róg kwadratu, lub jeżeli jego średnicą jest bok kwadratu, to przykryje dwa rogi, ale pozostawi nieprzykrytą przestrzeń dowolnie blisko nich, więc w efekcie będzie trzeba przykryć te rogi po raz drugi. Powiedzmy, że takie koło przykrywa „pół” rogu. Jednak okręgów jest 3, więc są w stanie przykryć maksymalnie 3 z 4 rogów (wliczając połówki,) więc zawsze będzie istniał wycinek kwadratu niezakryty przez koła.

Udowodnimy teraz, że $n = 99$ działa. Rozważmy ułożenie:



Tak ułożone koła pokrywają trochę ponad 99.75% powierzchni kwadratu. Obliczenia pozostawiamy jako ćwiczenie dla czytelnika.



Zadanie 2. Dana jest liczba pierwsza $p > 3$. Znajdź najmniejszą taką liczbę całkowitą $n > 3$, że Symbole Newtona $\binom{n}{k}$ dla $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ przyjmują dokładnie dwie różne reszty modulo p .

Bonus: Znajdź wszystkie liczby całkowite $n > 3$ o tej własności.

Autor zadania: Robert Rościzak

Rozwiązanie: Rozważmy $n < p$. Zauważmy, że $\binom{n}{0} = 1$ i $\binom{n}{1} = n$. Jeżeli $n < p$ to $n \not\equiv 1 \pmod{p}$, więc szukane dwie reszty to 1 i n .

Rozważmy $\binom{n}{2} \equiv n \pmod{p}$. Aby to zachodziło musi zachodzić

$$\frac{n-1}{2} \equiv 1 \pmod{p}$$

czyli $n = 3$ (ponieważ $n < p$). Sprzeczność. Pozostaje więc $\binom{n}{2} \equiv 1 \pmod{p}$.

Rozważmy $\binom{n}{3} \equiv 1 \pmod{p}$. Na mocy $\binom{n}{2} \equiv 1 \pmod{p}$ mamy

$$\frac{n-2}{3} \equiv 1 \pmod{p}$$

czyli $n = 5$ (ponieważ $n < p$). Takie n jednak nie daje rozwiązania.

Rozważmy $\binom{n}{3} \equiv n \pmod{p}$. Na mocy $\binom{n}{2} \equiv 1 \pmod{p}$ i $\binom{n}{1} \equiv n \pmod{p}$ mamy

$$\frac{n-2}{3} \equiv \frac{1}{n} \equiv \frac{n-1}{2} \pmod{p}$$

czyli $n \equiv -1 \pmod{p}$. Oznacza to, że najmniejsze n potencjalnie spełniające warunki zadania to $n = p - 1$. Udowodnimy, że to wystarczy.

Sposób 1: Zauważmy, że

$$\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p}$$

Jest to znany fakt. Po rozłożeniu wzorem jawnym w liczniku jest p w pierwszej potęgde, a w mianowniku nie występuje, więc podzielność zachodzi. Wykorzystamy to. Zauważmy, że

$$\binom{p-1}{k-1} + \binom{p-1}{k} = \binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p}$$

Oznacza to, że dwa kolejne symbole Newtona dają przeciwne reszty modulo p . Pozostaje zastosować prostą indukcję, by pokazać, że $\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod{p}$.



Sposób 2: Z Twierdzenia Wilsona wynika:

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

Wykorzystamy to. Rozłóżmy symbol Newtona wzorem jawnym:

$$\begin{aligned} \binom{p-1}{k} &= \frac{(p-1)!}{k!(p-1-k)!} \equiv \frac{-1}{k!(p-1-k)!} \equiv \\ &\equiv (-1) \frac{1}{k!} \cdot \prod_{i=1}^{p-1-k} \frac{-1}{p-i} \equiv (-1)^{k+1} \frac{1}{(p-1)!} \equiv (-1)^k \pmod{p} \end{aligned}$$

co kończy dowód. ■

Podpowiedź do bonusu: Wykorzystaj Twierdzenie Lucasa:
https://en.wikipedia.org/wiki/Lucas%27s_theorem