



Zadanie 1. Pies Azor buduje piramidę z kości, w taki sposób, że każde kolejne piętro ma o jedną kość więcej niż poprzednie. Wykaż, że do zbudowania piramidy o n piętrach Azor potrzebuje $\frac{n \cdot (n + 1)}{2}$ kości.

Autor zadania: Grzegorz Rudnicki

Rozwiązanie: Skorzystamy z zasady indukcji matematycznej. Oznaczmy S_n jako sumę liczb naturalnych od 1 do n . Dla $n = 1$:

$$S_n = \frac{1 \cdot (1 + 1)}{2}$$

Założenie indukcyjne:

$$S_n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

Teza indukcyjna:

$$S_{n+1} = \frac{(n + 1) \cdot (n + 2)}{2}$$

Oczywiście,

$$S_{n+1} = S_n + (n + 1).$$

Z założenia indukcyjnego:

$$S_{n+1} = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} + \frac{2 \cdot (n + 1)}{2} = \frac{(n + 1) \cdot (n + 2)}{2}$$

Czyli, na mocy założenia indukcyjnego, powyższa równość zachodzi dla każdego $n \in \mathbb{N}$, zatem do zbudowania piramidy o n piętrach faktycznie potrzeba $\frac{n(n + 1)}{2}$ kości.





Zadanie 2. Pies Burek biega między dwoma zabawkowymi pociągami jadącymi z przeciwnych stron po prostym torze. Kiedy Burek dobiegnie do jednego pociągu, zawraca i biegnie w kierunku drugiego. Oba z nich jadą ze stałą prędkością $10 \frac{\text{m}}{\text{min}}$, natomiast Burek biega z prędkością $100 \frac{\text{m}}{\text{min}}$. Ponieważ Burek jest bardzo mądrym psem, wie jak zawrócić w nieskończenie krótkim czasie i nie wytracając prędkości. Pociągi początkowo znajdują się w odległości 100 m. Jaką łączną drogę przebiegnie Burek?

Autor zadania: Grzegorz Rudnicki

Rozwiązanie: Pociągi zbliżają się do siebie ze względną prędkością $20 \frac{\text{m}}{\text{min}}$, zatem spotkają się po 5 min. Kolejne odcinki przebiegnięte przez Burka są coraz krótsze (i przebiegane w coraz krótszym czasie). Sprawia to że trudne (choć oczywiście możliwe) jest znalezienie ich sumy. Ponieważ jednak Burek zawraca bez strat czasu i prędkości, możemy przyjąć, że po prostu porusza się ruchem po prostej ze stałą szybkością, zatem przebiegnie

$$100 \frac{\text{m}}{\text{min}} \cdot 5 \text{ min} = 500 \text{ m}$$