

Zadania matematyczne projektu MathLovers

z okresu
KWIECIEŃ – CZERWIEC 2025

Treści zadań

Wybór zadań i redakcja rozwiązań:

Scarlett Lafa, Tomasz Kossakowski, Antonina Pajek,
Bartosz Trojanowski, Maria Janyska, Robert Rończak,
Maja Chlewicka, Michał Fronczek, Grzegorz Rudnicki

Redakcja broszury:

Tomasz Kossakowski

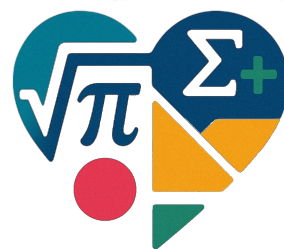
Skład $\text{\LaTeX}$:

Tomasz Kossakowski, Grzegorz Rudnicki, Antoni Syska

Organizacja:

Projekt Mathlovers

<https://mathlovers.eu/>



MathLovers

Spis treści

1	Zadania	3
1.1	24.04.2025	3
1.2	28.04.2025	3
1.3	01.05.2025	3
1.4	05.05.2025	4
1.5	08.05.2025	4
1.6	12.05.2025	4
1.7	15.05.2025	4
1.8	19.05.2025	4
1.9	21.05.2025 (Dzień Kosmosu)	5
1.10	22.05.2025	5
1.11	26.05.2025	5
1.12	26.05.2025 (Dzień matki)	6
1.13	29.05.2025	6
1.14	01.06.2025 (Dzień dziecka)	6
1.15	02.06.2025	6
1.16	05.06.2025	6
1.17	09.06.2025	7
1.18	12.06.2025	7
1.19	16.06.2025	7
1.20	19.06.2025	7
1.21	23.06.2025	8
1.22	23.06.2025 (Dzień ojca)	9
1.23	26.06.2025	9
1.24	30.06.2025	9
2	Podpowiedzi do zadań	10

1 Zadania

1.1 24.04.2025

 **Zadanie 1.** Wyznacz wartość wyrażenia

$$\text{NWD}(135, 2025, 2070).$$

 **Zadanie 2.** Staś do kartezjańskiego układu współrzędnych wpisał punkty: $A = (0, 7)$, $B = (2, 0)$, $C = (12, 1)$ oraz $D = (13, 9)$. Udowodnij, że czworokąt $ABCD$ ma pole równe 87.

 **Zadanie 3.** Niech α będzie ustaloną dodatnią liczbą całkowitą. Na tablicy napisane są liczby 1, 2, 3. Co minutę Bartek wybiera dwie dowolne liczby z tablicy, oznaczmy je przez x , y , ściera je i na ich miejsce wpisuje liczby $\alpha x + \alpha y$ oraz $\alpha x - \alpha y$. Znaleźć wszystkie takie α , że na tablicy może pojawić się liczba 7.

1.2 28.04.2025

 **Zadanie 4.** Tomek wybrał się na przejażdżkę rowerową. Łącznie przejechał 28 km, przy czym pierwszą część drogi jechał po piasku z prędkością $16 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a drugą po asfalcie z prędkością $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Na całej trasie osiągnął prędkość średnią $24 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ile kilometrów jechał po piasku, a ile po asfalcie?

 **Zadanie 5.** Robert znalazł w swoim pokoju pewną liczbę pudełek z zapalnikami. W każdym po 41 zapalników, ma też kilka pustych. Postanowił zagrać z Marysią w następującą grę: na początku kładą wszystkie pełne pudełka na stosie po lewej stronie, a puste odkładają na bok. Następnie na zmianę wykonują ruchy. Każdy gracz w swoim ruchu ma do wyboru jedną z czterech operacji, którą wykona:

- (a) Zabiera do siebie ze stosu po lewej stronie jedno pudełko z zapalnikami.
- (b) Zabiera jedno pudełko ze stosu po lewej stronie, po czym wysypuje zawierające się w nim zapalniki na kupkę po prawej stronie, puste pudełko odrzuca i jedną zapalnik z tego stosu bierze do siebie.
- (c) Zabiera ze stosu po prawej stronie 41 zapalników i pakuje je do pustego pudełka, odkłada na kupkę po lewej stronie i z prawej kupki bierze jeszcze jedną zapalnik do siebie.
- (d) Zabiera do siebie jedną zapalnik z prawej kupki.

Grę zaczyna Marysia. Wygrywa gracz, który zabierze ostatnią zapalnik. Określ w zależności od liczby pełnych pudełek kto ma strategię wygrywającą.

1.3 01.05.2025

 **Zadanie 6.** Dany jest trójkąt ABC , którego wysokości pozostają w stosunku 20 : 15 : 12. Na boku AB (najkrótszym boku trójkąta ABC) zbudowano trójkąt równoboczny ABD , gdzie punkt D jest po przeciwnej stronie prostej AB niż punkt C . Poprowadzono odcinki łączące punkty C oraz D z punktem E , który jest środkiem odcinka AB . Obliczyć stosunek pola trójkąta ADE do pola trójkąta BCE .

 **Zadanie 7.** Rozstrzygnąć, czy liczba

$$|53^{35} - 35^{53}|$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

1.4 05.05.2025

 **Zadanie 8.** Dane są dwie różne liczby pierwsze $p, q \geq 3$. Udowodnij, że ich różnica jest liczbą parzystą.

 **Zadanie 9.** Dany jest ω okrąg o środku w punkcie $O = (0, 0)$ i promieniu 1 i punkt $A = (0, 1)$. Punkt B leży na osi OX , a punkt C to przecięcie odcinka AB z okręgiem ω . Udowodnij, że zachodzi:

$$|AB| \cdot |AC| = 2.$$

Podpowiedzi: 3 11

1.5 08.05.2025

 **Zadanie 10.** Sekwencje DNA są stworzone z nukleotydów, z których każdy należy do jednego z typów A, T, C, G . Kodon jest stworzony z 3 nukleotydów, a łańcuch DNA jest stworzony z pewnej liczby kodonów. Znajdź najmniejszą taką liczbę n , że w dowolnym łańcuchu DNA składającym się z n nukleotydów istnieją dwa identyczne kodony. **Podpowiedzi: 5**

 **Zadanie 11.** Dana jest funkcja f . Wiadomo, że $f(1) = 3$. Ponadto, dla dowolnych liczb x, y jest prawdziwa zależność

$$f(x) + y = f(y) + x.$$

Znajdź wzór funkcji f . **Podpowiedzi: 8**

1.6 12.05.2025

 **Zadanie 12.** Maciej przebiegł trasę długości 18 km. Początkowo biegł równym tempem, ale po pewnym czasie zmęczył się i zwolnił o 25% na pozostałą część biegu. Gdy skończył bieg, spojrzał na swój smartwatch i dowiedział się, że wolniejszym tempem biegł dwa razy dłużej niż szybszym. Jaki dystans (w kilometrach) pokonał Maciej zanim zwolnił?

 **Zadanie 13.** Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n liczba

$$2^{n+1} + 5^n$$

jest liczbą złożoną.

1.7 15.05.2025

 **Zadanie 14.** Udowodnij, że jeśli dla całkowitych dodatnich liczb a i b , $a^2 + 2b + 1$ oraz $b^2 + 2a + 1$ są kwadratami liczb całkowitych, to

$$a = b.$$

 **Zadanie 15.** Wykaż, że liczba $2^{6n+1} + 3^{2n+2}$ jest podzielna przez 11. **Podpowiedzi: 9**

1.8 19.05.2025

 **Zadanie 16.** Udowodnić, że nie istnieją dodatnie liczby całkowite m, n spełniające

$$3^m + 5^n = 2025^{2025}.$$

Podpowiedzi: 6 13

- Zadanie 17.** Dany jest trójkąt ABC . Punkt D jest przecięciem boku AB z dwusieczną kąta $\sphericalangle ACB$. Punkty E, F są rzutami punktu D odpowiednio na proste AC i BC . Udowodnij, że $CE = CF$.

- Zadanie 18. Zadanie 3.** Dane są liczby dodatnie a, b takie, że $a > b \geq 3$. Rozstrzygnąć, która z poniższych liczb jest większa:

$$a^b \quad \square \quad b^a.$$

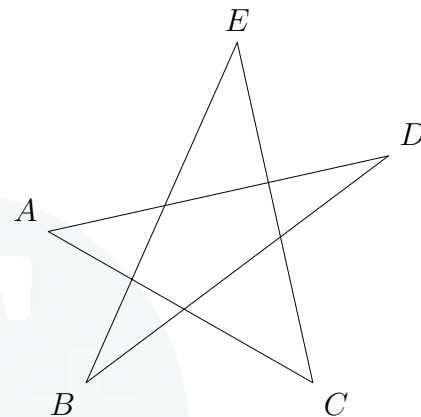
Uzasadnić, dlaczego tak jest. **Podpowiedzi:** 10 1

1.9 21.05.2025 (Dzień Kosmosu)

- Zadanie 19.** Oblicz sumę miar kątów

$$|\sphericalangle ACE| + |\sphericalangle BDA| + |\sphericalangle CEB| + |\sphericalangle DAC| + |\sphericalangle EBD|.$$

- Zadanie 20.** Pewna cywilizacja gwiazdowa ogłosiła przetarg na połączenie gwiazd gwiazdozbioru Oriona kosmostradami. Warunkiem postawionym w przetargu jest to, aby można było wrócić do punktu początkowego korzystając z każdej z nich dokładnie raz. Poniżej przedstawiono projekt przygotowany przez mieszkańców planety Ziemia (oparty na tradycyjnym dla nich przedstawieniu tej konstelacji). Niestety projekt nie spełnia postawionego warunku. Ile co najmniej kosmostrad powinni jeszcze zaprojektować ziemscy inżynierowie, aby ich projekt miał szansę na realizację?



Rysunek 1: Zadanie 19.

1.10 22.05.2025

- Zadanie 21.** Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x równanie

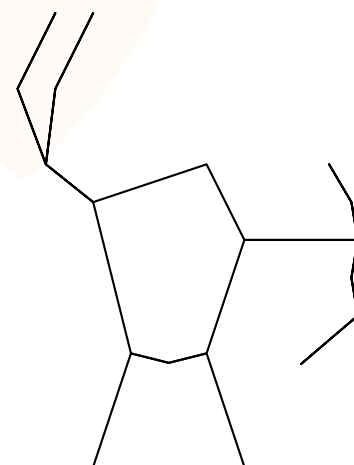
$$2025x - 2024x + 2023x - 2022x + \dots + 3x - 2x + x = 0.$$

Podpowiedzi: 4

- Zadanie 22.** Udowodnij, że dla dowolnego $i, n \in \mathbb{Z}_+$, $a_i, b_i, k \in \mathbb{Z}$:

$$\left((a_1^2 + kb_1^2)(a_2^2 + kb_2^2)(a_3^2 + kb_3^2) \dots (a_i^2 + kb_i^2)\right)^n = x^2 + ky^2,$$

gdzie $x, y \in \mathbb{Z}$.



Rysunek 2: Zadanie 20.

1.11 26.05.2025

- Zadanie 23.** Do pewnego basenu prowadzą dwie rury dopływowe oraz jeden spust. Pierwsza rura napełnia cały basen w 3 godziny, druga w 4 godziny, zaś spust opróżnia pełny basen do połowy w 6 godzin. Ile czasu zajmie napełnienie pustego basenu, jeśli jednocześnie działać będą obie rury dopływowe i spust?

- Zadanie 24.** Dane są takie dodatnie liczby a, b, c , że

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

Wykaż, że zachodzi również

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2}.$$

1.12 26.05.2025 (Dzień matki)

-  **Zadanie 25.** Na spotkanie rady rodziców przyszło 6 mam: Alicja, Beata, Celina, Dorota, Emilia i Florentyna. Rozmawiając, ustaliły, że żadna z nich nie ma tyle samo dzieci co inna, żadna nie ma więcej niż 9 dzieci, oraz że razem mają 38 dzieci. Ponadto Florentyna ma więcej dzieci niż Emilia, która ma więcej dzieci niż Dorota, która ma więcej dzieci niż Celina, która ma więcej dzieci niż Beata, która ma więcej dzieci niż Alicja, która ma najmniej dzieci. Ile dzieci ma każda z nich?

1.13 29.05.2025

-  **Zadanie 26.** Kolejka w lunaparku jeździ w kółko po szynach, które tworzą dwa współśrodkowe okręgi. Każde koło wagonika ma promień długości 20 cm. Zewnętrzne koło podczas jednego pełnego okrążenia wykonuje o 4 pełne obroty więcej niż wewnętrzne. Jaki jest rozstaw szyn kolejki?
-  **Zadanie 27.** Ogrodnik kupił 9 drzewek i chce je posadzić w ogrodzie w taki sposób, żeby tworzyły dokładnie 9 rzędów. Przez rząd drzewek rozumiemy co najmniej trzy drzewka stojące wzdłuż linii prostej. Czy potrafisz doradzić ogrodnikowi, jak to zrobić?

1.14 01.06.2025 (Dzień dziecka)

-  **Zadanie 28.** Jaś i Małgosia organizują piknik z okazji dnia Dziecka. Jaś twierdzi, że więcej osób zmieści się na jego dwóch kwadratowych kocach o wymiarach $a \times a$ i $b \times b$; a Małgosia, że więcej osób zmieści się na jej dwóch prostokątnych kocach o wymiarach $a \times b$. Które z dzieci ma rację? Przyjmij, że $a \neq b$.
-  **Zadanie 29.** Na pikniku Jaś i Małgosia grają w następującą grę: Jaś losuje jedną kartę (ze standardowej talii 52 kart) i zatrzymuje ją dla siebie. Następnie Małgosia losuje jedną kartę z pozostałych 51 kart, i, jeżeli ma ona większą wartość niż karta Jasia, wygrywa, w przeciwnym razie zaś przegrywa. Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej Małgosi? Wartości kart od najniższej do najwyższej to: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A.

1.15 02.06.2025

-  **Zadanie 30.** Dane są liczby rzeczywiste x, y , dla których zachodzi

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 11. \end{cases}$$

Oblicz wartość wyrażenia $x^3 + y^3$.

-  **Zadanie 31.** Rozstrzygnij, czy da się pokryć prostokątną tablicę o wymiarach 10×10 pionowymi i poziomymi klockami 1×4 tak, aby klocki pokryły całą tablicę i aby się nie pokrywały.

1.16 05.06.2025

-  **Zadanie 32.** Wykaż, że równanie

$$a^2 + b^2 = 16c^3 + 8c^2 + 4c + 3$$

dla a, b, c będącymi liczbami całkowitymi dodatnimi nie ma rozwiązań.

- Zadanie 33.** Na boku CD kwadratu $ABCD$ wybrano dowolny punkt E . Dwusieczna kąta $\sphericalangle EAB$ przecina bok BC w punkcie F . Wykaż, że $AE = DE + BF$.

1.17 09.06.2025

- Zadanie 34.** Wykaż, że liczba $174^{22} - 26^{22}$ jest podzielna przez 148.
- Zadanie 35.** Dwóch matematyków wybrało się na wycieczkę samochodem. Nagle zauważyli, że licznik samochodu wskazał 75957 przejechanych kilometrów, czyli liczbę, która czytana od przodu i od tyłu jest identyczna. Godzinę później zauważyli, że sytuacja się powtórzyła. Z jaką prędkością jechali?

1.18 12.06.2025

- Zadanie 36.** Czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, b, c , że każda z liczb ab, bc, ca kończy się cyframi 20?
- Zadanie 37.** Wyznacz resztę z dzielenia 345^{679} przez 16.

1.19 16.06.2025

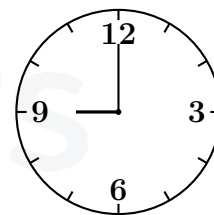
- Zadanie 38.** Kwadrat $ABCD$ ma bok długości 3. Niech E będzie takim punktem na odcinku CD , że $DE = 1$. Odcinki AE i BD przecinają się w F . Niech D', E' będą odbiciami odpowiednio punktów D, E względem F . Wyznaczyć pole czworokąta $ABD'E'$. **Podpowiedzi:** 7 14
- Zadanie 39.** Wyznaczyć wszystkie trójki dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c spełniających układ równań

$$\begin{cases} a = bc^2 \\ b = ca^2 \\ c = ab^2. \end{cases}$$

Podpowiedzi: 12 2

1.20 19.06.2025

- Zadanie 40.** Wyobraź sobie, że korzystasz z tradycyjnego zegara i wybiła godzina 9:00. Po jakim czasie wskazówki zegara utworzą kąt 90° ?
- Zadanie 41.** Rozwiąż równanie w liczbach rzeczywistych:



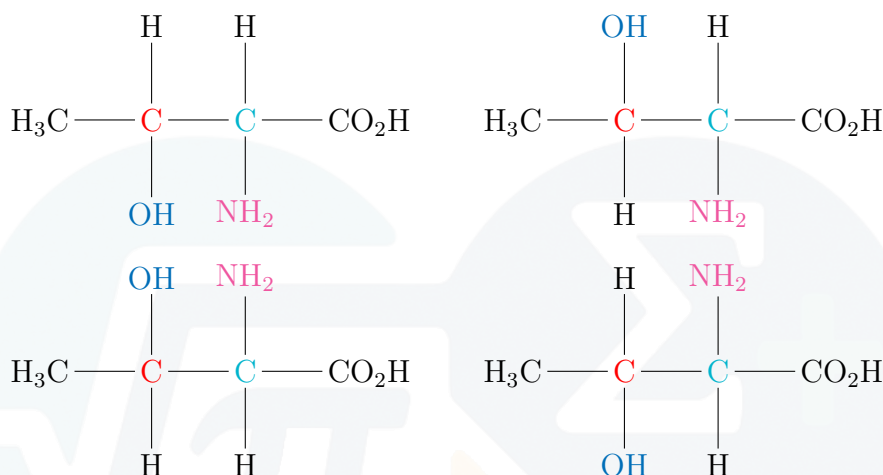
$$x^{2025} + x^{2024}y + x^{2023}y^2 + \dots + x^2y^{2023} + xy^{2024} + y^{2025} = 0.$$

- Zadanie 42.** *Stereoizomery* to cząsteczki, które mają taki sam skład chemiczny (czyli składają się z tych samych atomów i mają taką samą liczbę każdego rodzaju atomu), mają takie same połączenia między atomami, ale różnią się przestrzennym ułożeniem tych atomów. Wyobraź sobie to tak: masz dwa ludziki LEGO złożone z dokładnie tych samych klocków. Każdy klocek jest taki sam i jest w tej samej liczbie. Ale jeden ludzik ma rękę wyciągniętą w prawo, a drugi w lewo. Niby to samo, ale wyglądają inaczej – i mogą zachowywać się inaczej, np. pasować do innych elementów w różny sposób. W chemii stereoizomery też mogą zachowywać się inaczej – choć mają taki sam „przepis” (wzór

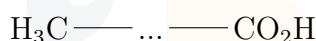
chemiczny), to przez inne ułożenie atomów mogą mieć różne właściwości: smak, zapach, a nawet działanie w organizmie.

W chemii organicznej od każdego węgla odchodzą 4 kreski. Poniżej przedstawiono pewien związek chemiczny. Jest to kwas 2-amino-3-hydroksybutanowy (nazwa nie jest ważna). Zauważ, że ma on 4 stereoizomery (załóżmy, że odbicia lustrzane to inne stereoizomery). Grupą jest ciąg atomów połączony kreskami, którą na potrzeby zadania możemy potraktować jak atom.

Przy czerwonym węglu **C** grupa **OH** może być na górze, lub na dole. Przy niebieskim węglu **C** grupa **NH₂** — tak samo.

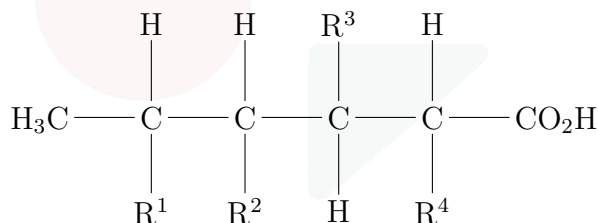


Ile stereoizomerów ma hipotetyczny związek, który między grupami



ma n węgli, gdzie od każdego węgla i odchodzi dokładnie jeden wodór H oraz jedna grupa R^i , gdzie w całym związku grupy $\text{R}^1, \text{R}^2, \dots, \text{R}^n$ są parami różne oraz inne niż H , H_3C i CO_2H ?

Dla lepszego zobrazowania, poniżej przedstawiono związek dla $n = 4$:



Zadanie 43. Dla jakich wartości $n \in \mathbb{Z}_+$ wyrażenie

$$\frac{4n^4 - 48n^3 + 168n^2 - 144n + 60}{n^2 - 6n + 3}$$

przyjmuje wartości dodatnie całkowite?

1.21 23.06.2025

Zadanie 44. W urnie znajdują się kule białe, niebieskie i czarne. Wiemy, że kul białych jest o 6 więcej niż kul niebieskich, ponadto prawdopodobieństwo wylosowania z pośród tych kul w jednokrotnym losowaniu kuli czarnej wynosi $\frac{1}{2}$, zaś kuli niebieskiej $\frac{1}{7}$. Ile jest kul poszczególnych kolorów?

Zadanie 45. Dane są dwie liczby rzeczywiste a i b takie, że liczby $a + b$, $ab\sqrt{a}$ oraz $ab\sqrt{b}$ są wymierne. Wykaż, że również a i b są wymierne.

1.22 23.06.2025 (Dzień ojca)

-  **Zadanie 46.** W turnieju tenisa stołowego, zorganizowanego z okazji Dnia Ojca wzięło udział 50 Ojców i 50 synów. Każdy para rozegrała jeden mecz z każdą inną parą, nie było remisów. Czy możliwe jest, aby każda z par wygrała tę samą liczbę meczów? Odpowiedź uzasadnij.

1.23 26.06.2025

-  **Zadanie 47.** Wpisz w kwadraciki wszystkie liczby od 1 do 10 tak, aby zachodziły wszystkie równości.

$$\begin{array}{ccccccc} \square & : & \square & + & \square & = & \square \\ & & & & & & \times \\ \square & & & & & & \square \\ = & & & & & & = \\ \square & - & \square & + & \square & = & \square \end{array}$$

-  **Zadanie 48.** Wykaż, że jeśli $a \neq 0$ to

$$a^4 + \frac{250}{a^2} \geq 75.$$

1.24 30.06.2025

-  **Zadanie 49.** Znajdź najmniejszą liczbę całkowitą nieujemną n , że liczba

$$n^2 + n + 41$$

jest złożona.

-  **Zadanie 50.** W klasie jest n chłopców i n dziewczyn. Znajdź najmniejszą taką liczbę całkowitą k taką, że jeżeli istnieje co najmniej k różnych par dzieci różnych płci, które się nawzajem znają, to da się połączyć wszystkie dzieci w pary tak, żeby sparowane osoby się znały i każda osoba miała dokładnie jednego partnera przeciwnej płci.

2 Podpowiedzi do zadań

1. Policz pochodną funkcji $f(x)$.
2. Dany układ równań jest równoważny układowi

$$\begin{cases} a = b^2 \\ b = c^2 \\ c = a^2. \end{cases}$$

Czemu tak jest?

3. Mówimy, że dwa trójkąty są *podobne* jeżeli ich odpowiednie kąty są równe. Załóżmy, że pewne trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne, przy równe kąty są przy tych samych literach. Wtedy zachodzi równość:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

4. Rozpatrz takie same równania ale na mniejszych liczbach, np. $3x - 2x + x = 0$. Co można zauważyć?
5. Rozważ najpierw uproszczoną wersję zadania, gdzie kodony mają 1 nukleotyd.
6. Jakie dzielniki może mieć liczba 3^m ? Co wyróżnia te dzielniki?
7. Zauważ, że trójkąty DEF i $D'E'F$ mają równe pola. Czemu tak jest?
8. Funkcja f to pewne przyporządkowanie zmiennym wartości. Dla każdej liczby x , $f(x)$ jest równa pewnej innej, z góry ustalonej liczbie. Wartość $f(x)$ może być wyrażana wzorem zależnym od x , np. $f(x) = 3x$, $f(x) = x^2 + 4$.
9. Spróbuj zastosować indukcję.
10. Rozważ funkcję
$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}.$$
11. Rozważ środek odcinka AC .
12. Pomnóż wszystkie równania stronami.
13. Liczba 3^m nie jest podzielna przez 2. Dlaczego i co to oznacza?
14. Wynika stąd, że $[ADE] = [ADF] + [D'E'F]$, gdzie $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ .