



Zadanie 1. Znajdź najmniejszą liczbę całkowitą nieujemną n , że liczba

$$n^2 + n + 41$$

jest złożona.

Autor zadania: Robert Rośczał

Odpowiedź: $n = 40$.

Rozwiązanie: Ten wielomian jest znany jako Wielomian Eulera. Jego szczególną własnością jest to, że przyjmuje wartości pierwsze dla $n \leq 40$. Dla $n = 40$ mamy $40^2 + 40 + 41 = 41^2$, więc rozwiązaniem jest $n = 40$. Alternatywnie można sprawdzić pierwszość pierwszych 40 wyrazów by otrzymać wynik.



Zadanie 2. W klasie jest n chłopców i n dziewczyn. Znajdź najmniejszą taką liczbę całkowitą k taką, że jeżeli istnieje co najmniej k różnych par dzieci różnych płci, które się nawzajem znają, to da się połączyć wszystkie dzieci w pary tak, żeby sparowane osoby się znały i każda osoba miała dokładnie jednego partnera przeciwnej płci.

Autor zadania: Robert Rośczał

Odpowiedź: $k = n^2 - n + 1$.

Rozwiązanie: Zauważmy, że jeżeli $k \leq n^2 - n$, to pewien osobnik może nie znać nikogo przeciwnej płci, w związku z czym nie da się spełnić warunków zadania. Udowodnimy teraz, że $n^2 - n + 1$ wystarczy.

Sposób 1: Zastosujemy indukcję. Udowodnimy, że można znaleźć takie 2 osoby, które posiadają łącznie nie więcej niż $2n - 2$ znajomości. Wtedy możemy zastosować założenie indukcyjne dla $n - 1$, ponieważ wśród pozostałych $2n - 2$ dzieci istnieje $n^2 - n + 1 - 2n + 2 = (n - 1)^2 - (n - 1) + 1$ znajomości. Wybierzmy dowolną osobę która ma mniej niż n znajomych i dowolnego jej znajomego. Ich łączna liczba znajomych to najwyżej $(n - 1) + n$ zmniejszona o powtórzenia, czyli ich wspólną znajomość. Oznacza to, że sparowanie ich usunie $2n - 2$ znajomości i można zastosować założenie indukcyjne na pozostałe osoby, ckd.

Sposób 2: Rozważmy eksperyment losowy: Dobierzmy pary losowo, bez względu na to czy osoby się znają. Oznaczmy przez S_i czy i -ta dziewczyna zna swojego partnera. (Wtedy $S_i = 1$, inaczej $S_i = 0$.) Ponadto niech $S = S_1 + \dots + S_n$. Naszym celem jest znalezienie takiego ustawienia, że $S = n$. Obliczmy wartość oczekiwaną S :

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[S_i] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(S_i = 1) = \sum_{i=1}^n \frac{n^2 - n + 1}{n^2} = n \frac{n^2 - n + 1}{n^2} = n - 1 + \frac{1}{n}$$

Ponieważ wartość oczekiwana to średnia wszystkich wartości, to w szczególności musi istnieć wartość nie mniejsza niż $n - 1 + \frac{1}{n}$. Niech S_m będzie taką wartością. Ponieważ S przyjmuje tylko wartości całkowite, to z $S_m \geq n - 1 + \frac{1}{n}$ wynika, że $S \geq n$, więc $S_m = n$, co kończy dowód.

Sposób 3: Na mocy Twierdzenia Halla, skojarzenie w grafie dwudzielnym istnieje wtedy i tylko wtedy gdy każda grupa m chłopców zna co najmniej m różnych dziewczyn. Załóżmy przeciwnie, że dla pewnego m , istnieje grupa chłopców znająca tylko $m - 1$ dziewczyn. Wtedy każdy z nich nie zna żadnej z pozostałych $n + 1 - m$ dziewczyn, więc możemy oszacować liczbę nieistniejących znajomości przez

$$X \geq m(n + 1 - m) \geq n$$

Ostatnie przejście jest równoważne z $n \geq m > 0$. Oznacza to, że aby warunek Halla nie był spełniony, to liczba krawędzi nie może przekraczać $n^2 - n$, czyli dla $k = n^2 - n + 1$ na mocy Twierdzenia Halla istnieje skojarzenie.