



Rozwiązania zadań
z 24.04.2025
Następnych zadań możecie
spodziewać się już jutro!

Zadanie 1. Wyznacz wartość wyrażenia

$$\text{NWD}(135, 2025, 2070).$$

Autor zadania: Tomasz Kossakowski

Rozwiązanie:

Sposób 1: Rozłóżmy wszystkie liczby na czynniki pierwsze. Otrzymujemy:

$$135 = 3^3 \cdot 5,$$

$$2025 = (45^2) = (3^2 \cdot 5)^2 = 3^4 \cdot 5^2,$$

$$2070 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 23.$$

Największym wspólnym dzielnikiem tych liczb jest zatem $45 = 3^2 \cdot 5$, gdyż:

$$135 = (3^2 \cdot 5) \cdot 3,$$

$$2025 = (3^2 \cdot 5) \cdot 3^2 \cdot 5,$$

$$2070 = (3^2 \cdot 5) \cdot 2 \cdot 23.$$

Sposób 2: Zgodnie z algorytmem Euklidesa:

$$\text{NWD}(a, b) = \text{NWD}(a, b - a).$$

Stosując w zadaniu:

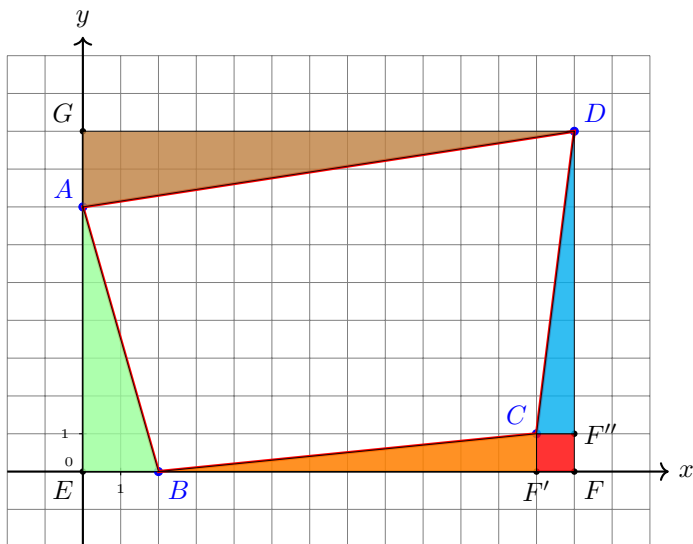
$$\begin{aligned} \text{NWD}(135, 2025, 2070) &= \text{NWD}(135, 2025, 2070 - 2025) = \\ &= \text{NWD}(135, 2070 - 2025, 2070) = \text{NWD}(135, 45, 2070) = \text{NWD}(45, 2070) = 45 \end{aligned}$$

Odpowiedź: $\text{NWD}(135, 2025, 2070) = 45$.

Zadanie 2. Staś do kartezjańskiego układu współrzędnych wpisał punkty: $A = (0, 7)$, $B = (2, 0)$, $C = (12, 1)$ oraz $D = (13, 9)$. Udowodnij, że czworokąt $ABCD$ ma pole równe 87.

Autor zadania: Tomasz Kossakowski

Rozwiązanie:



Zauważmy, że czworokąt $ABCD$ możemy bez problemu zmieścić w prostokącie o wymiarach 13×9 .

Niech $E = (0, 0)$, $F = (13, 0)$, $G = (0, 9)$, $F' = (12, 0)$, $F'' = (13, 1)$. Wtedy tym prostokątem jest $EFDG$. Dla uproszczenia zapisu niech $[F]$ oznacza pole figury F . Zatem, patrząc na rysunek powyżej, jesteśmy w stanie stwierdzić, że:

$$\begin{aligned}
 [ABCD] &= [EFDG] - [ABE] - [BCF'] - [CF'FF''] - [CDF''] - [ADG] = \\
 &= 13 \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 7 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10 - 1 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 13 = 87.
 \end{aligned}$$

Co kończy dowód.



Rozwiązania zadań
z 24.04.2025
Następnych zadań możecie
spodziewać się już jutro!

Zadanie 3. Niech α będzie ustaloną dodatnią liczbą całkowitą. Na tablicy napisane są liczby 1, 2, 3. Co minutę Bartek wybiera dwie dowolne liczby z tablicy, oznaczmy je przez x , y , ściera je i na ich miejsce wpisuje liczby $\alpha x + \alpha y$ oraz $\alpha x - \alpha y$. Znaleźć wszystkie takie α , że na tablicy może pojawić się liczba 7.

Autor zadania: Bartosz Trojanowski

Rozwiązanie:

Zauważmy, że obie liczby $\alpha x + \alpha y$, $\alpha x - \alpha y$ są podzielne przez α . Aby więc jedna z nich była równa 7, to α musi być dzielnikiem 7, czyli α musi być równe 1 lub 7.

Dla $\alpha = 7$, liczba $2\alpha - \alpha$ spełnia warunki zadania, a dla $\alpha = 1$, możemy otrzymać liczby 1, 1, 5 przez wykonanie operacji na liczbach 2, 3, po czym możemy dodać 5 do 1 aby uzyskać 6, którą możemy potem dodać do 1 i otrzymać 7. Podsumowując, jedyne liczby spełniające warunki zadania to $\alpha \in \{1, 7\}$.

Zadanie 1. Tomek wybrał się na przejażdżkę rowerową. Łącznie przejechał 28 km, przy czym pierwszą część drogi jechał po piasku z prędkością $16 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a drugą po asfalcie z prędkością $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Na całej trasie osiągnął prędkość średnią $24 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ile kilometrów jechał po piasku, a ile po asfalcie?

Autor zadania: Michał Fronczek

Rozwiązanie: Wprowadźmy następujące oznaczenia:

s_c - cała droga przebyta przez Tomka

s_1 - długość drogi po piachu

s_2 - długość drogi po asfalcie

t_c - cały czas jazdy

t_1 - czas przebycia pierwszego odcinka

t_2 - czas przebycia drugiego odcinka

v_1 - prędkość na pierwszym

v_2 - prędkość na drugim odcinku

$v_{\text{śr}}$ - średnia prędkość na całej trasie

Z definicji prędkości średniej mamy

$$v_{\text{śr}} = \frac{s_c}{t_c} \iff t_c = \frac{s_c}{v_{\text{śr}}} = \frac{28}{24} = \frac{7}{6}.$$

W takim razie

$$t_1 + t_2 = t_c = \frac{7}{6}.$$

Analogicznie z definicji prędkości średniej dostajemy, że:

$$24 = v_{\text{śr}} = \frac{s_c}{t_c} = \frac{s_1 + s_2}{t_c} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_c} = \frac{16t_1 + 30t_2}{\frac{7}{6}},$$

czyli po przemnożeniu stronami przez $\frac{7}{6}$

$$28 = 16t_1 + 30t_2 \iff 30t_2 = 28 - 16t_1 \iff t_2 = \frac{14 - 8t_1}{15}.$$

Podstawiając to do wcześniejszego równania dostajemy

$$\frac{7}{6} = t_1 + t_2 = t_1 + \frac{14 - 8t_1}{15}.$$

Mnożąc stronami przez 30 mamy

$$35 = 30t_1 + 28 - 16t_1 \iff 7 = 14t_1 \iff t_1 = \frac{1}{2}.$$

Stąd

$$t_2 = \frac{14 - 8t_1}{15} = \frac{14 - 8\frac{1}{2}}{15} = \frac{14 - 4}{15} = \frac{2}{3}.$$

Ostatecznie:

$$s_1 = v_1 t_1 = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8$$

$$s_2 = v_2 t_2 = 30 \cdot \frac{2}{3} = 20$$

Odpowiedź: Tomek przejechał 8 km piaskiem i 20 km asfaltem.

Zadanie 2. Robert znalazł w swoim pokoju pewną liczbę pudełek z zapalkami. W każdym po 41 zapalek, ma też kilka pustych. Postanowił zagrać z Marysią w następującą grę:

na początku kładą wszystkie pełne pudełka na stosie po lewej stronie, a puste odkładają na bok. Następnie na zmianę wykonują ruchy. Każdy gracz w swoim ruchu ma do wyboru jedną z czterech operacji, którą wykona:

- Zabiera do siebie ze stosu po lewej stronie jedno pudełko z zapalkami.
- Zabiera jedno pudełko ze stosu po lewej stronie, po czym wysypuje zawierające się w nim zapalki na kupkę po prawej stronie, puste pudełko odrzuca i jedną zapalkę z tego stosu bierze do siebie.
- Zabiera ze stosu po prawej stronie 41 zapalek i pakuje je do pustego pudełka, odkłada na kupkę po lewej stronie i z prawej kupki bierze jeszcze jedną zapalkę do siebie.
- Zabiera do siebie jedną zapalkę z prawej kupki.

Grę zaczyna Marysia. Wygrywa gracz, który zabierze ostatnią zapalkę. Określ w zależności od liczby pełnych pudełek kto ma strategię wygrywającą.

Autor zadania: Michał Fronczek

Rozwiązanie: Zobaczmy, jak zmienia się łączna liczba zapalek na lewym i prawym stosie po każdym ruchu z punktu widzenia podzielności przez 2.

- tutaj odrzucamy jedno pudełko, czyli 41.
- przerzucenie części zapalek z lewej kupki na prawą nas nie interesuje, bo patrzymy naraz na dwie kupki. Więc sumarycznie zmiana ilości jest o jedną zapalkę.
- Analogicznie jak w b) zmiana jest tylko o jedną zapalkę.
- Tu odrzucamy jedną zapalkę z prawego stosu, więc też tyle wyniesie zmiana.

Podsumowując każdy ruch zmienia parzystość łącznej liczby zapalek na stosach. Zauważmy ponadto, że jeśli gracz A zmienił w swoim ruchu parzystość łącznej

liczby zapalek, to po ruchu gracza B parzystość ta wróci znowu do stanu sprzed ruchu gracza A. Oznacza to że A zawsze zmienia łączną ilość zapalek z nieparzystej na parzystą, a B z parzystej na nieparzystą, albo odwrotnie. Rozważmy dwa przypadki:

1. Liczba pudełek zapalek jest nieparzysta.

Tutaj na początku mamy nieparzystą ilość zapalek, więc Maria w swoim ruchu, jako że zaczyna, zawsze będzie zmieniać łączną liczbę zapalek z nieparzystej na parzystą, a Robert z parzystej na nieparzystą. Tak więc tylko Maria może zmienić łączną liczbę zapalek na 0, czyli wygrać. Tak też się stanie, bo zapalek jest skończenie wiele i z każdym ruchem maleje, więc kiedyś wreszcie osiągnie 0, czyli gra się skończy, a musi wygrać Maria.

2. Liczba pudełek zapalek jest parzysta.

Tutaj przeprowadzamy rozumowanie analogiczne do 1., ale teraz to Robert zmienia łączną liczbę zapalek z nieparzystej na parzystą, więc to on wygra grę.

Odpowiedź Jeśli pudełek zapalek było na początku nieparzystą ilość wygra Maria, w przeciwnym wypadku wygra Robert

Zadanie 1. Dany jest trójkąt ABC , którego wysokości pozostają w stosunku $20 : 15 : 12$. Na boku AB (najkrótszym boku trójkąta ABC) zbudowano trójkąt równoboczny ABD , gdzie punkt D jest po przeciwnej stronie prostej AB niż punkt C . Poprowadzono odcinki łączące punkty C oraz D z punktem E , który jest środkiem odcinka AB . Obliczyć stosunek pola trójkąta ADE do pola trójkąta BCE .

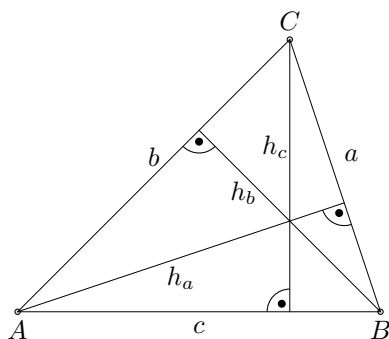
Autor zadania: Scarlett Lafa

Rozwiązanie:

Odp.: $3\sqrt{3} : 8$

Na początku sprawdzimy, jakim trójkątem jest ABC (ostrokątnym, prostokątnym czy rozwartokątnym).

Oznaczmy boki trójkąta ABC jako a, b, c , a wysokości trójkąta ABC oznaczamy odpowiednio h_a, h_b, h_c .



$$P_{ABC} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ah_b = \frac{1}{2}ah_c$$

Wiemy, że najdłuższa wysokość w trójkącie opuszczona jest zawsze na jego najkrótszy bok.

Założmy też bez straty ogólności, że bok AC jest najdłuższy.

W związku z tym $h_c : h_a : h_b = 20 : 15 : 12$, więc zapiszmy

$$\frac{1}{2}a \cdot 15x = \frac{1}{2}b \cdot 12x = \frac{1}{2}c \cdot 20x$$

Zapisaaliśmy wysokości jako $15x, 12x$ i $20x$, bo podany został tylko stosunek długości wysokości - nie podano ich długości.

Skracamy $\frac{1}{2}x$ i otrzymujemy:

$$15a = 12b = 20c.$$

Wyrażmy długości boków względem długości jednego z nich (tutaj: a):

$$\begin{aligned} 12b &= 15a \\ b &= \frac{15}{12}a \\ b &= \frac{5}{4}a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20c &= 15a \\ c &= \frac{15}{20}a \\ c &= \frac{3}{4}a. \end{aligned}$$

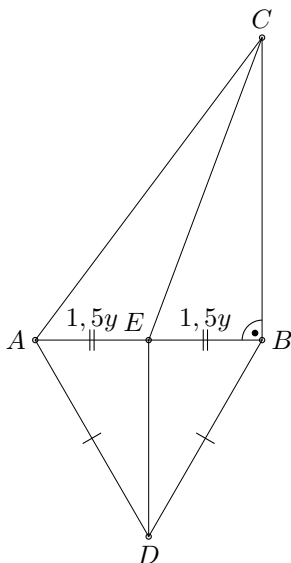
Zauważmy, że

$$a^2 + c^2 = a^2 + \frac{9}{16}a^2 = \frac{25}{16}a^2$$

oraz

$$b = \frac{5}{4}a \implies b^2 = \frac{25}{16}a^2,$$

czyli $b^2 = a^2 + c^2$ i z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa wynika, że trójkąt ABC jest prostokątny.



Boki trójkąta ABC pozostają w stosunku $3 : 4 : 5 = |AB| : |BC| : |AC|$. Oznaczmy więc bok BC jako $4y$ i bok AB jako $3y$.

Obliczmy pole trójkąta BCE :

$$P_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot 4y \cdot \frac{3}{2}y = 3y^2.$$

Znając właściwości trójkąta równobocznego obliczamy pole trójkąta ADE (połowę pola trójkąta ABD):

$$P_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(3y)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{9y^2 \sqrt{3}}{8}.$$

Obliczamy stosunek pól trójkątów:

$$\frac{P_{ADE}}{P_{BCE}} = \frac{\frac{9y^2 \sqrt{3}}{8}}{3y^2} = \frac{9y^2 \sqrt{3}}{8 \cdot 3y^2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Zadanie 2. Rozstrzygnąć, czy liczba

$$|53^{35} - 35^{53}|$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Autor zadania: Scarlett Lafa

Rozwiązanie:

Odp.: Liczba ta nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Każda liczba będąca kwadratem liczby całkowitej spełnia następujące warunki:

- (1) jest większa lub równa zero,
- (2) daje resztę 1 lub 0 z dzielenia przez 4.

Warunek (1) jest spełniony, bo $|53^{35} - 35^{53}| \geq 0$.

Wprowadźmy następującą definicję (zgodnie z książką *Matematyka olimpijska: Algebra i teoria liczb* autorstwa p. Adama Neugebauera):

Niech $m > 1$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Mówimy, że liczba całkowita a **przystaje** do liczby całkowitej b **modulo** m , gdy $m \mid a - b$. Zapisujemy to tak:

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Relację $\cdot \equiv \cdot \pmod{m}$ nazywamy **kongruencją modulo** m (lub **według modułu** m).

Jasne jest, że $a \equiv b \pmod{m} \iff$ liczby a i b dają tę samą resztę z dzielenia przez m .

Ponadto prawdziwe są zależności:

- (1) $a \equiv a \pmod{m}$,
- (2) $a \equiv b \pmod{m} \implies b \equiv a \pmod{m}$,
- (3) $a \equiv b \pmod{m} \wedge b \equiv c \pmod{m} \implies a \equiv c \pmod{m}$,

(4) $a \equiv b \pmod{m} \wedge c \equiv d \pmod{m} \implies a \pm b \equiv c \pm d \pmod{m},$

(5) $a \equiv b \pmod{m} \wedge c \equiv d \pmod{m} \implies ab \equiv cd \pmod{m}.$

(6) $a \equiv b \pmod{m} \implies a^n \equiv b^n \pmod{m}.$

Udowodnijmy teraz warunek (2):

$$a \equiv 0 \pmod{4} \implies a^2 \equiv 0^2 = 0 \pmod{4}$$

$$a \equiv 1 \pmod{4} \implies a^2 \equiv 1^2 = 1 \pmod{4}$$

$$a \equiv 2 \pmod{4} \implies a^2 \equiv 2^2 = 4 \equiv 0 \pmod{4}$$

$$a \equiv 3 \pmod{4} \implies a^2 \equiv 3^2 = 9 \equiv 1 \pmod{4}$$

Dlaczego sprawdziliśmy już wszystkie kwadraty liczb całkowitych? Zauważmy, że jedyne możliwe reszty z dzielenia przez 4 to $\{1, 2, 3, 4\}$.

Sprawdźmy, czy warunek (2) też jest spełniony. Zauważmy, że

$$53^{34} = (53^{17})^2 \quad \text{oraz} \quad (53^{17})^2 \equiv 1 \pmod{4},$$

ponieważ 53^{34} jest kwadratem liczby nieparzystej.

Zatem:

$$53^{34} \cdot 53 \equiv 1 \cdot 53 \pmod{4}$$

$$53^{35} \equiv 53 \pmod{4}$$

$$53^{35} \equiv 53 \pmod{4}$$

$$53 \equiv 5 \pmod{4}$$

Analogicznie:

$$35^{52} = (35^{26})^2 \quad \text{oraz} \quad 35^{52} \equiv 1 \pmod{4},$$

bo 35^{52} jest kwadratem liczby całkowitej parzystej.

$$35^{52} \cdot 35 \equiv 1 \cdot 35 \pmod{4}$$

$$35^{53} \equiv 35 \pmod{4}$$

$$35^{53} \equiv 35 \equiv 3 \pmod{4}$$

Więc:

$$|53^{35} - 35^{53}| \equiv |5 - 3| \equiv 2 \pmod{4}.$$

W związku z tym liczba $|53^{35} - 35^{53}|$ nie może być kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 1. Dane są dwie różne liczby pierwsze $p, q \geq 3$. Udowodnij, że ich różnica jest liczbą parzystą.

Autor zadania: Robert Rończak

Rozwiązanie: Zauważmy że liczby parzyste większe od 2 nie mogą być pierwsze, ponieważ posiadają dzielnik 2. Oznacza to, że p, q muszą być nieparzyste. Różnica dwóch liczb nieparzystych jest parzysta, co dowodzi tezy zadania.

■

Zadanie 2. Dany jest okrąg ω o środku w punkcie $O = (0, 0)$ i promieniu 1 i punkt $A = (0, 1)$. Punkt B leży na osi OX , a punkt C to przecięcie odcinka AB z okręgiem ω . Udowodnij, że zachodzi

$$|AB| \cdot |AC| = 2$$

Autor zadania: Robert Rośczał

Rozwiązanie 1: Niech M oznacza środek odcinka AC zgodnie z podpowiedzią. Wtedy podobne są trójkąty

$$\triangle MAO \sim \triangle OAB$$

Oznacza to, że zachodzi stosunek boków:

$$\frac{|MA|}{|AO|} = \frac{|OA|}{|AB|}$$

Ponieważ promień okręgu ω jest równy $|OA| = 1$, mamy:

$$|MA| \cdot |AB| = 1$$

Ponieważ $2|MA| = |AC|$, mamy:

$$|AC| \cdot |AB| = 2$$

Co było do udowodnienia. ■

Rozwiązanie 2: Na mocy potęgi punktu B względem okręgu ω zachodzi równość:

$$|BC| \cdot |BA| = |BO|^2 - |OA|^2$$

Na mocy Twierdzenia Pitagorasa zachodzi:

$$|BO|^2 = |AB|^2 - |AO|^2 = |AB|^2 - 1$$

Daje to:

$$|BC| \cdot |BA| = |AB|^2 - 2$$

$$(|AB| - |BC|) \cdot |AB| = 2$$

$$|AB| \cdot |AC| = 2$$

Co było do udowodnienia. ■

Rozwiązanie 3: Zauważmy, że punkt B jest obrazem punktu C w inwersji o środku w punkcie A i promieniu $\sqrt{2}$. Jest to prawda, ponieważ w tej inwersji okrąg ω przekształca się na oś OX , więc obraz punktu C , który jest na okręgu będzie przecięciem półprostej AC z obrazem tego okręgu, czyli osią OX . Na mocy definicji inwersji daje to:

$$|AC| \cdot |AB| = (\sqrt{2})^2 = 2. \quad \blacksquare$$

Zadanie 1. Sekwencje DNA są stworzone z nukleotydów, z których każdy należy do jednego z typów A, T, C, G . Kodon jest stworzony z 3 nukleotydów, a łańcuch DNA jest stworzony z pewnej liczby kodonów. Znajdź najmniejszą taką liczbę n , że w dowolnym łańcuchu DNA składającym się z n nukleotydów istnieją dwa identyczne kodony.

Autor zadania: Robert Rościzak

Rozwiązanie: Rozważając odpowiedź zauważamy, że wystarczy 5 nukleotydów, aby jeden z nich się powtórzył. Prowadzi to do wniosku, którym jest Zasada Szufladkowa Dirichleta. Skorzystamy z niej w pełnym rozwiązaniu. Zauważmy, że każdy z nukleotydów można wybrać na 4 sposoby, więc jest łącznie $4^3 = 64$ różnych kodonów. Pewien kodon się powtórzy jeżeli jest ich co najmniej jeden więcej w łańcuchu, a więc 65. Ponadto, każdy kodon ma 3 nukleotydy, więc ostateczna odpowiedź to $n = 65 \cdot 3 = 195$.

Zadanie 2. Dana jest funkcja f . Wiadomo, że $f(1) = 3$. Ponadto, dla dowolnych liczb x, y jest prawdziwa zależność

$$f(x) + y = f(y) + x.$$

Znajdź wzór funkcji f .

Autor zadania: Robert Rościzak

Rozwiązanie: Rozważając równanie funkcyjne warto rozważyć pewne specjalne przypadki, w szczególności takie, w których równanie przyjmie prostszą formę. Tutaj można wykorzystać podstawienie $y = 1$, które upraszcza równanie do postaci

$$f(x) + 1 = f(1) + x$$

na mocy założenia $f(1) = 3$ upraszcza się to do

$$f(x) + 1 = 3 + x$$

czyli $f(x) = x + 2$, co jest rozwiązaniem zadania.

Zadanie 1. Maciej przebiegł trasę długości 18 km. Początkowo biegł równym tempem, ale po pewnym czasie zmęczył się i zwolnił o 25% na pozostałą część biegu. Gdy skończył biec, spojrzął na swój smartwatch i dowiedział się, że wolniejszym tempem biegł dwa razy dłużej niż szybszym. Jaki dystans (w kilometrach) pokonał Maciej zanim zwolnił?

Autor zadania: Maja Chlewicka

Rozwiązanie: Oznaczmy pierwotną prędkość Macieja (w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$) przez v , a przez t czas (w godzinach), w jakim biegł szybszym tempem. Wtedy jego wolniejsza prędkość jest równa $\frac{3}{4}v$, a czas, który spędził biegnąc tym tempem, jest równy $2t$. Całkowity dystans jaki przebiegł jest równy sumie dwóch częściowych dystansów, więc

$$18 = v \cdot t + \frac{3}{4}v \cdot 2t = \frac{5}{2}vt.$$

Zatem,

$$v \cdot t = 18 \cdot \frac{2}{5} = \frac{36}{5},$$

co jest dystansem przebiegniętym szybkim tempem.

Zadanie 2. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n liczba

$$2^{n+1} + 5^n$$

jest liczbą złożoną.

Źródło zadania: VIII LO im. Władysława IV w Warszawie

Wybór zadania: Antonina Pajek

Rozwiązanie: Pokażemy, że dla dowolnego całkowitego dodatniego n ta liczba dzieli się przez 3. Rozpatrzmy dwa przypadki:

- a) n jest liczbą parzystą, czyli $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$,
- b) n nie jest liczbą parzystą, czyli $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Żeby to zrobić, przypomnijmy sobie czym jest *modulo*. Tak jak w rozwiązaniach zadań z dnia 1.05.2025:

Niech $m > 1$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Mówimy, że liczba całkowita a **przystaje** do liczby całkowitej b **modulo** m , gdy $m \mid a - b$. Zapisujemy to tak:

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Relację $\cdot \equiv \cdot \pmod{m}$ nazywamy **kongruencją modulo** m (lub **według modułu** m).

Jasne jest, że $a \equiv b \pmod{m} \iff$ liczby a i b dają tę samą resztę z dzielenia przez m .

Ponadto prawdziwe są zależności:

- $a \equiv a \pmod{m}$,
- $a \equiv b \pmod{m} \implies b \equiv a \pmod{m}$,
- $a \equiv b \pmod{m} \wedge b \equiv c \pmod{m} \implies a \equiv c \pmod{m}$,
- $a \equiv b \pmod{m} \wedge c \equiv d \pmod{m} \implies a \pm b \equiv c \pm d \pmod{m}$,
- $a \equiv b \pmod{m} \wedge c \equiv d \pmod{m} \implies ab \equiv cd \pmod{m}$.
- $a \equiv b \pmod{m} \implies a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

- a) Nasza liczba jest postaci $2^{2k+1} + 5^{2k}$. Rozpatrzmy teraz poszczególne reszty modulo 3 „fragmentów” tej liczby. Fragment $2^{2k+1} = 4^k \cdot 2$ daje zawsze resztę 2 z dzielenia przez 3, dlatego, że:

$$4^k \cdot 2 \equiv 4 \cdot 2 = 8 \equiv 2 \pmod{3},$$

natomiast fragment $5^{2k} = 25^k$ daje resztę 1, dlatego że

$$25^k \equiv 25 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Zatem cała liczba daje resztę

$$2^{2k+1} + 5^{2k} \equiv 2 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

z dzielenia przez 3, więc dla n parzystego ta liczba jest złożona.

- b) Nasza liczba przybiera postać $2^{2k+2} + 5^{2k+1}$. Nasz pierwszy fragment $2^{2k+2} = 4^k \cdot 4$ daje resztę 1 z dzielenia przez 3, gdyż

$$4^k \cdot 4 \equiv 4 \cdot 4 = 16 \equiv 1 \pmod{3},$$

natomiast fragment $5^{2k+1} = 25^k \cdot 5$ daje resztę 2 z dzielenia przez 3, bo

$$25^k \cdot 5 \equiv 25 \cdot 5 \equiv 1 \cdot 2 = 2 \pmod{3},$$

zatem tak jak w przypadku wyżej cała liczba daje resztę 0 z dzielenia przez 3, więc dla każdego naturalnego n nieparzystego liczba ta jest złożona.

Podsumowując, liczba ta jest złożona dla dowolnego całkowitego dodatniego n .

UWAGA: zauważmy, że liczba ta nigdy nie będzie równa 3 ponieważ jej minimalna wartość to 9, dla $n = 1$.



Zadanie 1. Udowodnij, że jeśli dla całkowitych dodatnich liczb a i b , a^2+2b+1 oraz b^2+2a+1 są kwadratami liczb całkowitych, to

$$a = b.$$

Źródło zadania: X OMG, zawody III stopnia

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Maja Chlewicka

Rozwiązanie: Załóżmy, że nie są równe, wówczas albo $a < b$ albo $a > b$. W pierwszym przypadku mamy:

$$b^2 < b^2 + 2a + 1 < b^2 + 2b + 1 = (b + 1)^2$$

W drugim przypadku analogicznie – w obu zatem jedna z liczb znajduje się pomiędzy kolejnymi kwadratami, więc sama nie może być kwadratem. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie. ■

Zadanie 2. Wykaż, że liczba $2^{6n+1} + 3^{2n+2}$ jest podzielna przez 11.

Źródło zadania: Podróże matematyczne

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Antonina Pajek

Rozwiązanie: Baza indukcyj: $n = 0$; nasza liczba przybiera postać:

$$21 + 32 = 11, \text{ teza działa.}$$

Założenie indukcyjne: teza zachodzi dla $n = k$ (k całkowite dodatnie):

$$2^{6k+1} + 3^{2k+2}$$

Krok Indukcyjny: dowodzę, że teza zachodzi dla $n = k + 1$, otrzymuję

$$2^{6k+7} + 3^{2k+4} = 64 \cdot 2^{6k+1} + 9 \cdot 3^{2k+2} = 9 \cdot (2^{6n+1} + 3^{2n+2}) + 55 \cdot 2^{6n+1}$$

Teraz wiemy, że część zaznaczona na zielono jest podzielna przez 11 na mocy założenia indukcyjnego, a część zaznaczona na niebiesko jest podzielna na 11 bo 11 dzieli 55. ■

Zadanie 1. Udowodnić, że nie istnieją dodatnie liczby całkowite m, n spełniające

$$3^m + 5^n = 2025^{2025}.$$

Autor zadania: Bartosz Trojanowski

Rozwiązanie:

Sposób 1: Zauważmy, że skoro $m, n > 0$, to jedyna liczba pierwsza dzieląca 3^m to 3, w szczególności liczba ta nie jest podzielna przez 2. Podobnie 2 nie jest dzielnikiem 5^n , czyli obie te liczby są nieparzyste. Zatem ich suma jest parzysta, jednak 2025^{2025} jest nieparzyste, a to daje sprzeczność, więc takie liczby nie istnieją. ■

Sposób 2: Zauważmy, że obie liczby $3^m, 2025^{2025}$ są podzielne przez 3, jednak jedyna liczba pierwsza dzieląca 5^n to 5, więc lewa strona równania nie jest podzielna przez 3, a prawa jest. To daje sprzeczność. ■

Problem 2. Let ABC be a triangle. Point D is the intersection of side AB with the angle bisector of $\angle ACB$. Points E and F are the orthogonal projections from point D onto lines AC and BC , respectively. Prove that $CE = CF$.

W dzisiejszych czasach matematyka i angielski to kluczowe umiejętności. Ucząc się matematyki po angielsku, zyskujemy dostęp do globalnej wiedzy i nowych możliwości. Dlatego przedstawiam to zadanie i do niego listę słów:

<i>triangle</i>	trójkąt	<i>angle bisector</i>	dwusieczna kąta
<i>side</i>	bok	<i>intersection</i>	punkt przecięcia
<i>angle</i>	kąt	<i>is equal to/equals</i>	jest równy
<i>line</i>	prosta	<i>orthogonal projection</i>	rzut prostokątny
<i>prove</i>	udowodnij		

Rozwiązanie w języku polskim dostępne jest na kolejnej stronie

Author of the problem: Tomasz Kossakowski

Solution:

Method 1: Note that $\triangle DEC \equiv \triangle DFC$ by the Angle-Side-Angle (ASA) congruence criterion: $\angle ECD = \angle FCD = \alpha$, $DC = DC$, and $\angle CDE = \angle CDF = 90^\circ - \alpha$, hence $CE = CF$.

Method 2: Let $AC = x$, $BC = y$, $AD = x'$, $BD = y'$, and let the height of triangle ABC dropped onto side AB be h (the figure is on the next page). From the angle bisector theorem:

$$\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}. \quad (1)$$

We also calculate the ratio of the areas of triangles ADC and BDC :

$$\frac{P_{ADC}}{P_{BDC}} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot h}{\frac{1}{2}BD \cdot h} = \frac{x'}{y'} \quad \text{oraz} \quad \frac{P_{ADC}}{P_{BDC}} = \frac{\frac{1}{2}AC \cdot DE}{\frac{1}{2}BC \cdot DF} = \frac{x}{y} \cdot \frac{DE}{DF}.$$

Combining equality (1) with the area ratios:

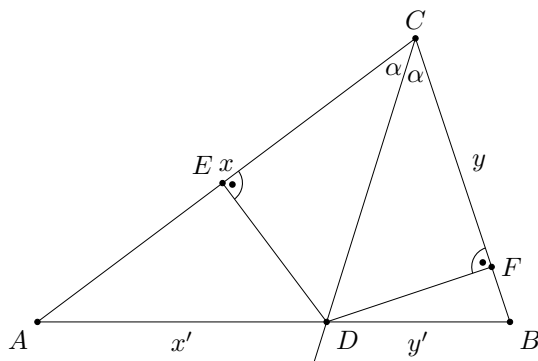
$$\frac{P_{ADC}}{P_{BDC}} = \frac{x'}{y'} = \frac{x}{y} = \frac{x}{y} \cdot \frac{DE}{DF},$$

hence $DE = DF$. From the Angle-Side-Angle congruence criterion: $\triangle DEC \equiv \triangle DFC$, because $\angle CDE = \angle CDF = 90^\circ - \alpha$, $DE = DF$ and $\angle CED = \angle CFD = 90^\circ$, hence $CE = CF$. ■

Zadanie 2. Dany jest trójkąt ABC . Punkt D jest przecięciem boku AB z dwusieczną kąta $\sphericalangle ACB$. Punkty E, F są rzutami punktu D odpowiednio na proste AC i BC . Udowodnij, że $CE = CF$.

Autor zadania: Tomasz Kossakowski

Rozwiązanie:



Sposób 1: Zauważmy, że $\triangle DEC \equiv \triangle DFC$ z mocy cechy kąt-bok-kąt: $\sphericalangle ECD = \sphericalangle FCD = \alpha$, $DC = DC$ oraz $\sphericalangle CDE = \sphericalangle CDF = 90^\circ - \alpha$, czyli $CE = CF$.

Sposób 2: Niech $AC = x$, $BC = y$, $AD = x'$, $BD = y'$ oraz niech wysokość trójkąta ABC opuszczona na bok AB to h .

Z twierdzenia o dwusiecznej:

$$\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}. \quad (2)$$

Policzmy także stosunek pól trójkątów ADC i BDC :

$$\frac{P_{ADC}}{P_{BDC}} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot h}{\frac{1}{2}BD \cdot h} = \frac{x'}{y'} \quad \text{oraz} \quad \frac{P_{ADC}}{P_{BDC}} = \frac{\frac{1}{2}AC \cdot DE}{\frac{1}{2}BC \cdot DF} = \frac{x}{y} \cdot \frac{DE}{DF}.$$

Łącząc równość (2) ze stosunkami pól:

$$\frac{P_{ADC}}{P_{BDC}} = \frac{x'}{y'} = \frac{x}{y} = \frac{x}{y} \cdot \frac{DE}{DF},$$

czyli $DE = DF$.

Z cechy kąt-bok-kąt: $\triangle DEC \equiv \triangle DFC$, gdyż $\sphericalangle CDE = \sphericalangle FDC = 90^\circ - \alpha$, $DE = DF$ oraz $\sphericalangle CED = \sphericalangle CFD = 90^\circ$, czyli $CE = CF$. ■

Zadanie 3*. Dane są liczby dodatnie a, b takie, że $a > b \geq 3$. Rozstrzygnąć, która z poniższych liczb jest większa:

$$a^b \quad \square \quad b^a.$$

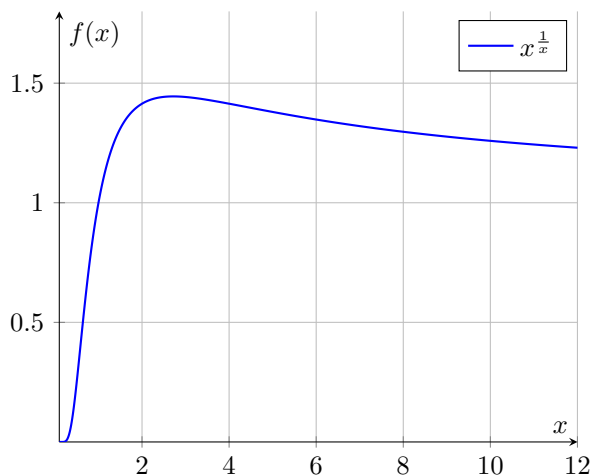
Uzasadnić, dlaczego tak jest.

Autor zadania: Tomasz Kossakowski

Rozwiązanie: Rozważmy funkcję

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} \quad \text{dla } x > 0.$$

Oto jej wykres:



Policzmy pochodną:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \left(x^{\frac{1}{x}} \right). \quad (3)$$

Na początku niech

$$y = f(x) = x^{\frac{1}{x}},$$

wtedy

$$\ln y = \ln \left(x^{\frac{1}{x}} \right) \iff \ln y = \frac{1}{x} \cdot \ln x.$$

Policzmy pochodną z obu stron:

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln x \right).$$

Wiemy, że

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

oraz

$$\frac{d}{dx}(g(x) \cdot h(x)) = \frac{dg(x)}{dx}h(x) + g(x)\frac{dh(x)}{dx}.$$

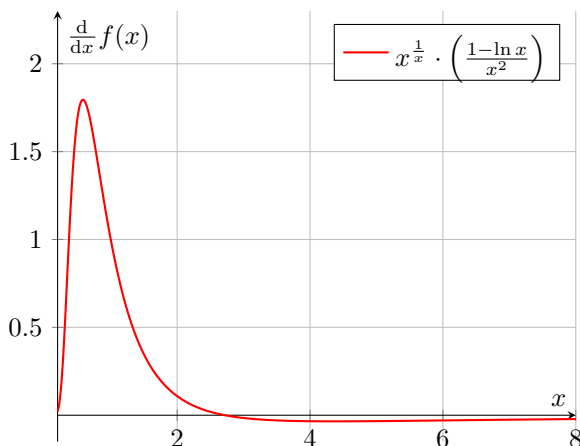
Wtedy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot \frac{-1}{x^2} \\ \frac{dy}{dx} &= y \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot \frac{-1}{x^2} \right), \end{aligned}$$

ale założyliśmy, że $y = f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, więc

$$\frac{dy}{dx} = x^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right).$$

Mamy naszą pochodną. Jej wykres wygląda tak:



Kiedy ta pochodna przyjmuje wartość 0?

$$x^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right) = 0$$

Wtedy, gdy jeden z poniższych czynników zeruje się.

$$x^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$$

Wartość funkcji $f(x) = \sqrt[x]{x} = 0$ tylko wtedy, gdy $x = 0$, gdyż pierwiastek dowolnego, niezerowego stopnia z liczby dodatniej jest dodatni. Ale $0 \not\equiv 0$, bo funkcja f jest określona tylko dla $x > 0$. W tym przypadku $x \in \emptyset$.

Tak jak już stwierdziliśmy wcześniej, $x > 0$, czyli $x \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 0$. Wtedy:

$$1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1$$

$$e^{\ln x} = e^1 \Leftrightarrow x = e.$$

$$x^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right) = 0 \iff x = e$$

Skoro pochodna ma tylko jedno miejsce zerowe, oznacza to, że dla $x > e$ będzie albo zawsze ujemna, albo zawsze dodatnia. Dla jakich x będzie ona ujemna?

$$\underbrace{x^{\frac{1}{x}}}_{>0} \cdot \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right) < 0$$

$$\frac{1 - \ln x}{\underbrace{x^2}_{>0}} < 0$$

$$1 - \ln x < 0 \iff \ln x > 1 \iff x > e$$

Jeżeli pochodna funkcji jest ujemna w przedziale $(e; +\infty)$, to funkcja pierwotna jest ściśle malejąca w przedziale $(e; +\infty)$, w szczególności w przedziale $[3; +\infty)$. Oznacza to, że dla $a > b \geq 3$:

$$a^{\frac{1}{a}} < b^{\frac{1}{b}}.$$

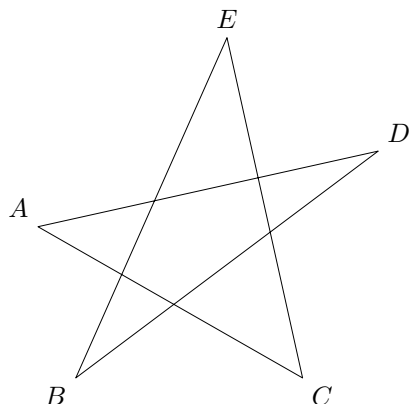
Podnieśmy obie strony do (dodatniej) potęgi ab (i nie zmieniamy znaku nierówności):

$$a^{\frac{ab}{a}} < b^{\frac{ab}{b}}$$

$$a^b < b^a.$$

I właśnie rozwiązaliśmy zadanie. ■

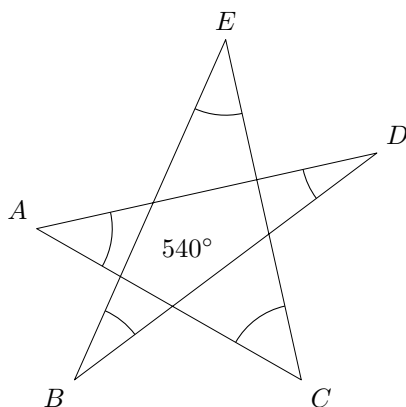
Zadanie 1. Oblicz sumę kątów $|\sphericalangle ACE|$, $|\sphericalangle BDA|$, $|\sphericalangle CEB|$, $|\sphericalangle DAC|$ i $|\sphericalangle EBD|$.



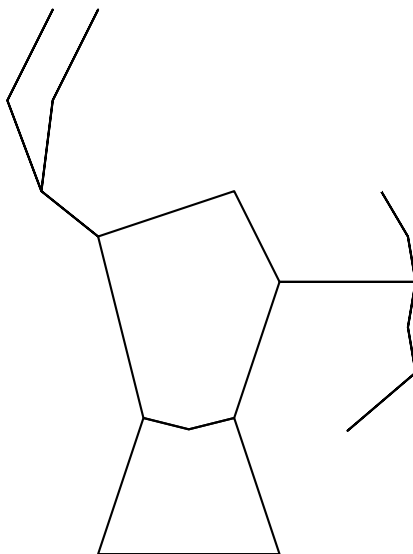
Źródło zadania: Wojewódzki Konkurs Przedmiotowy z Matematyki (Łódzkie Kuratorium Oświaty), Edycja 2020/2021, Etap Rejonowy

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Grzegorz Rudnicki

Rozwiązanie: Zauważmy, że suma miar kątów wewnętrznych w pięciokącie utworzonym przez proste AC , CE , EB , BD , i DA jest stała i równa 540° , zaś sumy miar kątów w zbudowanych na jego bokach trójkątach są równe 180° . Kąty przy podstawach są przyległe do odpowiednich kątów pięciokąta, zatem ich suma wynosi $2 \cdot (5 \cdot 180^\circ - 540^\circ) = 2 \cdot 360^\circ = 720^\circ$. Szukamy sumy pozostałych kątów w trójkątach, która jest równa $5 \cdot 180^\circ - 720^\circ = 180^\circ$.



Zadanie 2. Pewna cywilizacja gwiazdzna ogłosiła przetarg na połączenie gwiazd gwiazdozbioru Oriona kosmostradami. Warunkiem postawionym w przetargu jest to, aby można było wrócić do punktu początkowego korzystając z każdej z nich dokładnie raz. Poniżej przedstawiono projekt przygotowany przez mieszkańców planety Ziemia (oparty na tradycyjnym dla nich przedstawieniu tej konstelacji). Niestety projekt nie spełnia postawionego warunku. Ile co najmniej kosmostrad powinni jeszcze zaprojektować ziemscy inżynierowie, aby ich projekt miał szansę na realizację?



Autor zadania: Grzegorz Rudnicki

Rozwiązanie: Żeby możliwe było takie przejście przez kosmostrady, do każdej gwiazdy musi prowadzić parzysta ich liczba (zaczynamy od pewnej z nich i za każdym razem, gdy odwiedzamy jedną z gwiazd używamy dwóch dróg, kończymy wracając do początkowej gwiazdy.) Nieparzysta ilość kosmostrad wychodzi z 10 gwiazd, zatem wystarczy połączyć parami po dwie z nich, budując 5 kosmostrad.

Zadanie 1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x równanie

$$2025x - 2024x + 2023x - 2022x + \dots + 3x - 2x + x = 0.$$

Autor zadania: Bartosz Trojanowski

Rozwiązanie: Dane wyrażenie możemy przepisać jako

$$(2025x - 2024x) + (2023x - 2022x) + \dots + (3x - 2x) + x = x + x + \dots + x + x.$$

Zatem dla pewnej liczby całkowitej $n > 0$ mamy

$$nx = 0.$$

Skoro $n > 0$, to $x = 0$ i jest to jedyne rozwiązanie. ■

Zadanie 2. Udowodnij, że dla dowolnego $i, n \in \mathbb{Z}_+$, $a_i, b_i, k \in \mathbb{Z}$:

$$\left((a_1^2 + kb_1^2)(a_2^2 + kb_2^2)(a_3^2 + kb_3^2) \dots (a_i^2 + kb_i^2) \right)^n = x^2 + ky^2,$$

gdzie $x, y \in \mathbb{Z}$.

Autor zadania: Tomasz Kossakowski

Rozwiązanie: Na początek zauważmy, że dla dowolnych liczb $a, b, c, d, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} (a^2 + kb^2)(c^2 + kd^2) &= a^2c^2 + ka^2d^2 + kb^2c^2 + k^2b^2d^2 = \\ &= (ac)^2 + k(ad)^2 + k(bc)^2 + (kbd)^2 - 2abcd \cdot k + 2abcd \cdot k = \\ &= (ac)^2 - 2abcd \cdot k + (kbd)^2 + k \left((ad)^2 + 2abcd + (bc)^2 \right) = \\ &= (ac - kbd)^2 + k(ad + bc)^2 = X^2 + kY^2. \quad (1) \end{aligned}$$

Zauważmy, że $X, Y \in \mathbb{Z}$, gdyż $X = ac - kbd$, które jest całkowite oraz $Y = ad + bc$, które też jest całkowite.

Można z tego wywnioskować, że $(a_1^2 + kb_1^2)(a_2^2 + kb_2^2)$ będzie postaci $X^2 + kY^2$, ponadto mnożąc jednomiany postaci $X^2 + kY^2$ zawsze uzyskamy jednomian typu $X^2 + kY^2$. Oznacza to, że

$$(a_1^2 + kb_1^2)(a_2^2 + kb_2^2)(a_3^2 + kb_3^2) \dots (a_i^2 + kb_i^2) = A^2 + kB^2.$$

Teraz zastanówmy się, czym jest potęgowanie (z wykładnikiem całkowitym dodatnim). Potęgowanie to nic innego jak mnożenie czynnika wielokrotnie przez samego siebie. Oznacza to, że $(A^2 + kB^2)^n$ też będzie postaci $x^2 + ky^2$, a ponieważ każda z liczb a_i, b_i była całkowita, to A i B też są całkowite, a to oznacza, że x, y również są całkowite. ■

Zadanie 1. Do pewnego basenu prowadzą dwie rury dopływowe oraz jeden spust. Pierwsza rura napełnia cały basen w 3 godziny, druga w 4 godziny, zaś spust opróżnia pełny basen do połowy w 6 godzin. Ile czasu zajmie napełnienie pustego basenu, jeśli jednocześnie działać będą obie rury dopływowe i spust?

Autor zadania: Michał Fronczek

Rozwiązanie: Z powyższych danych wynika, że w ciągu jednej godziny pierwsza rura napełni $\frac{1}{3}$ basenu, druga zaś $\frac{1}{4}$. Spust opróżnia cały basen w 12 godzin, czyli opróżni $\frac{1}{12}$ basenu w ciągu godziny. Tak więc razem w ciągu godziny napełnione zostanie $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$ basenu, czyli cały basen zostanie napełniony w 2 godziny.

Zadanie 2. Dane są takie dodatnie liczby a, b, c , że $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ Wykaż, że zachodzi również

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2}$$

Autor zadania: Michał Fronczek

Rozwiązanie: Mnożąc stronami daną w tezie nierówność dostajemy

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \leq 1$$

Tu zaś stosując nierówność między średnią harmoniczną a arytmetyczną dostajemy:

$$\begin{aligned} \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} &= \frac{2}{\left(\frac{1}{a}\right) + \left(\frac{1}{b}\right)} + \frac{2}{\left(\frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{c}\right)} + \frac{2}{\left(\frac{1}{c}\right) + \left(\frac{1}{a}\right)} \leq \\ &\leq \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} + \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{2} + \frac{\frac{1}{c} + \frac{1}{a}}{2} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}}{2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \end{aligned}$$

To kończy dowód



Zadanie 1. Na spotkanie rady rodziców przyszło 6 mam: Alicja, Beata, Celina, Dorota, Emilia i Florentyna. Rozmawiając, ustaliły, że żadna z nich nie ma tyle samo dzieci co inna, żadna nie ma więcej niż 9 dzieci, oraz że razem mają 38 dzieci. Ponadto Florentyna ma więcej dzieci niż Emilia, która ma więcej dzieci niż Dorota, która ma więcej dzieci niż Celina, która ma więcej dzieci niż Beata, która ma więcej dzieci niż Alicja, która ma najmniej dzieci. Ile dzieci ma każda z nich?

Autor zadania: Grzegorz Rudnicki

Rozwiązanie: Zauważmy, że Florentyna musi mieć 9 dzieci (w przeciwnym wypadku kobiety miałyby razem maksymalnie $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33 < 38$ dzieci). Zostaje 29 dzieci, zatem analogicznie Emilia musi mieć 8 dzieci, potem Dorota 7, a Celina 6. Zostaje $38 - 9 - 8 - 7 - 6 = 8$ dzieci, zatem, ponieważ Beata ma więcej dzieci niż Alicja, Beata ma 5 dzieci a Alicja 3.

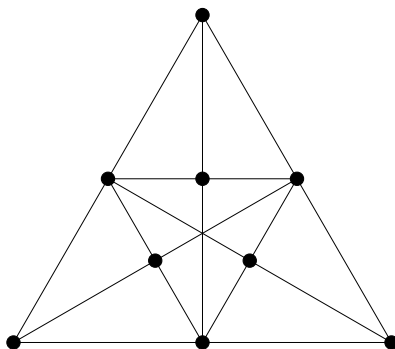


Zadanie 1. Ogrodnik kupił 9 drzewek i chce je posadzić w ogrodzie w takie sposób, żeby tworzyły dokładnie 9 rzędów. Przez rząd drzewek rozumiemy co najmniej trzy drzewka stojące wzdłuż linii prostej. Czy potrafisz doradzić ogrodnikowi, jak to zrobić?

Źródło: *100 zadań z błyskiem*, Edward Piegat, Zbigniew Romanowicz, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne 1997

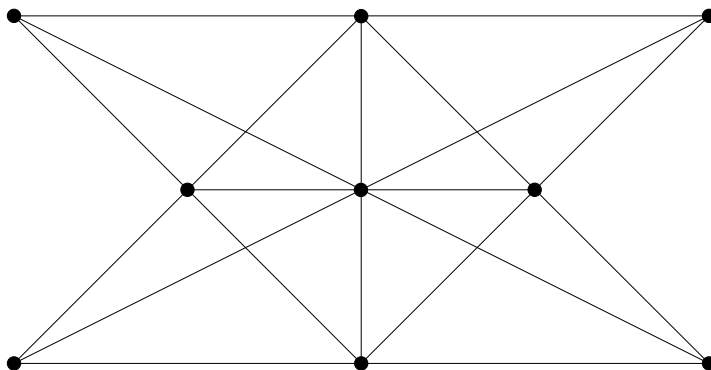
Wybór zadania: Scarlett Lafa

Rozwiązanie:



Można podać inne rozwiązania.

Uwaga. Jest to odmiana innego zadania, którego rozwiązanie ilustruje poniższy rysunek: posadzić 9 drzewek tak, aby tworzyły 10 rzędów po trzy drzewka.





Zadanie 2. Kolejka w lunaparku jeździ w kółko po szynach, które tworzą dwa współśrodkowe okręgi. Każde koło wagonika ma promień długości 20 cm. Zewnętrzne koło podczas jednego pełnego okrążenia wykonuje o 4 pełne obroty więcej niż wewnętrzne. Jaki jest rozstaw szyn kolejki?

Źródło: *Matematyka. Zbiór zadań konkursowych dla klas 7-8 szkoły podstawowej część 1*, Jerzy Janowicz, GWO 2017

Wybór zadania: Scarlett Lafa

Rozwiązanie: Oznaczmy promień wewnętrznego okręgu przez r , a zewnętrznego – przez R . Wówczas

$$2\pi R - 2\pi r = 4 \cdot 2\pi \cdot 20.$$

Stąd $R - r = 80$. Szukany rozstaw szyn jest zatem równy 80 cm.



Zadanie 1. Jaś i Małgosia organizują piknik z okazji dnia Dziecka. Jaś twierdzi, że więcej osób zmieści się na jego dwóch kwadratowych kocach o wymiarach $a \times a$ i $b \times b$; a Małgosia, że więcej osób zmieści się na jej dwóch prostokątnych kocach o wymiarach $a \times b$. Które z dzieci ma rację? Przyjmij, że $a \neq b$.

Autor zadania: Grzegorz Rudnicki

Rozwiązanie: Pokażemy, że więcej osób zmieści się na kocach Jasia. Przypuśćmy, że tak nie jest. Wtedy:

$$a^2 + b^2 \leq 2ab,$$

czyli

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \leq 0,$$

co nie zachodzi dla $a \neq b$. Sprzeczność, zatem Jaś ma rację.





Zadanie 2. Na pikniku Jaś i Małgosia grają w następującą grę: Jaś losuje jedną kartę (ze standardowej talii 52 kart) i zatrzymuje ją dla siebie. Następnie Małgosia losuje jedną kartę z pozostałych 51 kart, i, jeżeli ma ona większą wartość niż karta Jasia, wygrywa, w przeciwnym razie zaś przegrywa. Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej Małgosi? Wartości kart od najniższej do najwyższej to: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A

Autor zadania: Grzegorz Rudnicki

Rozwiązanie: Zauważmy, że prawdopodobieństwo wyciągnięcia przez Jasia karty o każdej wartości jest takie samo i wynosi $\frac{1}{13}$. Jeżeli Jaś wyciągnie Asa, Małgosia przegrywa. Jeżeli wyciągnie Króla, Małgosia wygra w $\frac{4}{51}$ przypadków. Jeżeli wyciągnie Damę, Małgosia wygra w $\frac{8}{51}$ przypadków, i tak dalej. Zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$\frac{1}{13} \cdot \sum_{n=1}^{13} \frac{4(n-1)}{51} = \frac{8}{17}$$

Symbol $\sum_{n=a}^b \dots$ oznacza sumę wyrażeń na prawo od symbolu obliczonych dla

wszystkich naturalnych $n \in \langle a; b \rangle$, np. $\sum_{n=1}^5 n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$.

 **Zadanie 1.** Dane są liczby rzeczywiste x, y , dla których zachodzą

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 11 \end{cases}$$

Oblicz wartość wyrażenia $x^3 + y^3$.

Autor zadania: Maria Janyska

Rozwiązanie:

Sposób 1: Zauważmy, że wyrażenie $x^3 + y^3$ można zapisać również jako iloczyn $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$. Możemy podstawić znane wartości $x + y = 8$ i $xy = 11$. Zatem mamy

$$x^3 + y^3 = 8(x^2 + y^2 - 11).$$

Pozostaje znaleźć wartość wyrażenia $x^2 + y^2$. Zapiszmy jako kwadrat sumy i podstawmy znane wartości:

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$8^2 = x^2 + y^2 + 2 \cdot 8$$

$$x^2 + y^2 = 42$$

Zatem możemy uzupełnić poszukiwaną wartość:

$$x^3 + y^3 = 8(42 - 11)$$

$$x^3 + y^3 = 248,$$

co właśnie należało znaleźć.

Sposób 2: Możemy wyznaczyć z pierwszego równania wartość y i podstawiać ją do drugiego równania. Będzie ono równaniem kwadratowym, które należy rozwiązać.

$$y = 8 - x$$

$$x(8 - x) = 11$$

$$-x^2 + 8x - 11 = 0$$

Obliczmy wyróżnik równania

$$\Delta = 8^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-11) = 64 - 44 = 20$$

$$x_1 = \frac{-8 + \sqrt{20}}{-2}, x_1 = 4 - \sqrt{5}$$

$$y_1 = 8 - (4 - \sqrt{5}) = 4 + \sqrt{5}$$

$$x_2 = \frac{-8 - \sqrt{20}}{-2}, x_2 = 4 + \sqrt{5}$$

$$y_1 = 8 - (4 + \sqrt{5}) = 4 - \sqrt{5}$$

Zauważmy, że $x_1 = y_2$ i $x_2 = y_1$. Zatem wystarczy nam policzyć sumę sześciątów tylko dla jednej pary wyznaczonych x, y .

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (4 - \sqrt{5})^3 + (4 + \sqrt{5})^3 = \\ 4^3 - 3 \cdot 4^2 \cdot \sqrt{5} + 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{5}^2 - \sqrt{5}^3 + 4^3 + 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{5}^2 + \sqrt{5}^3 &= 128 + 120 = 248, \end{aligned}$$

co należało właśnie obliczyć.



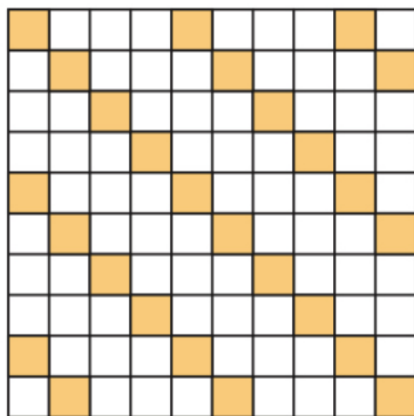
Zadanie 2. Rozstrzygnij, czy da się pokryć prostokątną tablicę o wymiarach 10×10 pionowymi i poziomymi klockami 1×4 tak, aby klocki pokryły całą tablicę i aby się nie pokrywały.

Źródło zadania: Kwadrat nr 13, Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, wrzesień 2014

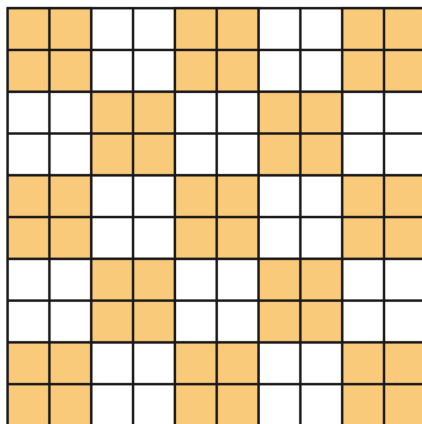
Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Maria Janyska

Rozwiązanie:

Sposób 1: Pokolorujmy kwadrat jak na poniższym rysunku. Każdy klocek 1×4 zajmuje dokładnie jedno kolorowe pole. Takich pól jest 26. Aby więc pokryć szachownicę, należy użyć 26 klocków. Jednak do jej pokrycia potrzebnych jest dokładnie $\frac{100}{4} = 25$ klocków. Dochodzimy do sprzeczności, odpowiedź na pytanie postawione w zadaniu jest więc negatywna.



Sposób 2: Rozważmy kolorowanie pokazane na poniższym rysunku. Każdy klocek pokrywa dwa kolorowe pola i dwa białe pola, więc wszystkie klocki powinny pokrywać łącznie tę samą liczbę białych i kolorowych pól. Tymczasem kwadrat zawiera 52 pola kolorowe oraz 48 pól białych. Dochodzimy więc znów do wniosku, że nie istnieje żądane pokrycie.





Zadanie 1. Wykaż, że równanie $a^2 + b^2 = 16c^3 + 8c^2 + 4c + 3$ dla a, b, c będącymi liczbami całkowitymi dodatnimi, nie ma rozwiązań.

Autor zadania: Maria Janyska

Rozwiązanie: Skoro rozpatrujemy liczby całkowite, możemy skupić się na podzielnościach obu stron równania. Przedstawmy prawą stronę w postaci

$$4(4c^3 + 2c^2 + c) + 3 \equiv 3 \pmod{4}.$$

Przystawanie zachodzi bez względu na wartość c . Przyjrzyjmy się teraz lewej stronie równania, a dokładniej temu, jakie reszty $\pmod{4}$ mogą przyjmować kwadraty liczb całkowitych.

n	0	1	2	3
n^2	0	1	0	1

Jakie więc reszty może mieć wyrażenie $a^2 + b^2$? Oczywiście może przyjmować wartości $0 + 0 \equiv 0, 0 + 1 \equiv 1, 1 + 1 \equiv 2 \pmod{4}$, nigdy zaś nie przyjmują reszty 3. Oznacza to, że reszta $\pmod{4}$ lewej strony jest nierówna reszcie prawej strony, co pokazuje, że istotnie równanie nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych, co należało wykazać.

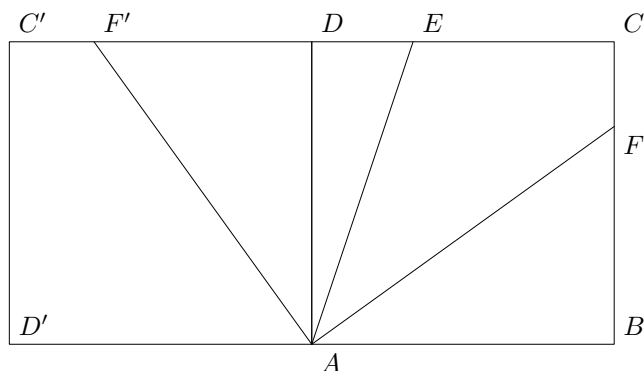


Zadanie 2. Na boku CD kwadratu $ABCD$ wybrano dowolny punkt E . Dwusieczna kąta $\sphericalangle EAB$ przecina bok BC w punkcie F . Wykaż, że $|AE| = |DE| + |BF|$.

Źródło zadania: *Matematyka. Arkusze maturalne. Poziom rozszerzony* Tomasz Masłowski, Piotr Nodzyński, Słomińska Elżbieta, Anna Toruńska, Zelek Janina, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń 2024

Wybór zadania: Maria Janyska

Rozwiązanie: Obróćmy kwadrat o 90° przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, tak jak na rysunku. Punkt F przechodzi na punkt F' , przy czym z własności obrotu $\sphericalangle FAF' = 90^\circ$.



Przekształćmy następująco prawą stronę tezy:

$$|DE| + |BF| = |DE| + |DF'| = |EF'|.$$

Musimy więc pokazać, że trójkąt $\triangle F'EA$ jest równoramienny, co otrzymamy przez prosty rachunek kątów.

$$\begin{aligned} \sphericalangle EF'A &= \sphericalangle BFA = \sphericalangle FAD = \sphericalangle FAE + \sphericalangle EAD = \sphericalangle FAB + \sphericalangle EAD = \\ &= \sphericalangle F'AD + \sphericalangle EAD = \sphericalangle EAF' \end{aligned}$$

Skoro mamy równość kątów $\sphericalangle EF'A = \sphericalangle EAF'$, trójkąt $\triangle F'EA$ jest równoramienny, co daje nam tezę o równości odcinków.



Zadanie 1. Wykaż, że liczba $174^{22} - 26^{22}$ jest podzielna przez 148.

Autor zadania: Maja Chlewicka

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} 174^{22} - 26^{22} &= \\ &= (174 - 26)(174^{21} + 174^{20} \cdot 26 + \dots + 174 \cdot 26^{20} + 26^{21}) = \\ &= 148 \cdot (174^{21} + 174^{20} \cdot 26 + \dots + 174 \cdot 26^{20} + 26^{21}). \end{aligned}$$

$(174^{21} + 174^{20} \cdot 26 + \dots + 174 \cdot 26^{20} + 26^{21}) \in \mathbb{Z}$, czyli liczba jest podzielna przez 148.



Zadanie 2. Dwóch matematyków wybrało się na wycieczkę samochodem. Nagle zauważyli, że licznik samochodu wskazał 75957 przejechanych kilometrów, czyli liczbę, która czytana od przodu i od tyłu jest identyczna. Godzinę później zauważyli, że sytuacja się powtórzyła. Z jaką prędkością jechali?

Źródło zadania: szaloneliczby.pl

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Maja Chlewicka

Rozwiązanie: Najbliższym palindromem jest liczba 76067 i taki też będzie wynik przejechanych kilometrów. To oznacza, że musieli jechać z prędkością $110 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.



Zadanie 1. Czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite a , b , c , że każda z liczb ab , bc , ca kończy się cyframi 20?

Źródło zadania: Kwadrat nr 11, Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, grudzień 2013

Wybór zadania: Antonina Pajek

Rozwiązanie: Zauważmy, że jeśli liczba kończy się cyframi 20, to dzieli się przez 5, ale nie przez 25 (bo liczby podzielne przez 25 mają dwie ostatnie cyfry 00, 25, 50 lub 75). Przypuśćmy, że istnieją opisane w zadaniu liczby a , b , c . Każda z liczb ab , bc , ca ma wówczas w rozkładzie na czynniki pierwsze dokładnie jedną piątkę. Stąd iloczyn $ab \cdot bc \cdot ca = (abc)^2$ ma w rozkładzie na czynniki pierwsze dokładnie trzy piątki, co jest niemożliwe, ponieważ jest kwadratem liczby całkowitej (wszystkie czynniki pierwsze występują parzystą liczbę razy w jego rozkładzie).



Zadanie 2. Wyznacz resztę z dzielenia 345^{679} przez 16.

Autor zadania: Antonina Pajek

Rozwiązanie: Zobaczmy że

$$345^{679} \equiv 9^{679} \pmod{16}$$

Wiemy że

$$9 \equiv 9 \pmod{16}$$

oraz

$$9^2 \equiv 1 \pmod{16}.$$

Zatem możemy rozpisać:

$$345^{679} \equiv (9^2)^{339} \cdot 9 \equiv 1 \cdot 9 = 9 \pmod{16}.$$

Zatem szukaną resztą jest 9.



Zadanie 1. Kwadrat $ABCD$ ma bok długości 3. Niech E będzie takim punktem na odcinku CD , że $DE = 1$. Odcinki AE i BD przecinają się w F . Niech D', E' będą odbiciami odpowiednio punktów D, E względem F . Wyznaczyć pole czworokąta $ABD'E'$.

Autor zadania: Bartosz Trojanowski

Rozwiązanie: Przez $[X]$ będziemy oznaczać pole figury X . Trójkąty DEF i $D'E'F$ są przystające na mocy cechy bok-kąt-bok, więc mają równe pola. Stąd wynika, że

$$[ABD'E'] = [ABCD] - ([ADF] + [D'E'F]) - [BCD] = [ABCD] - [ADE] - [BCD].$$

Łatwo można obliczyć

$$[ABCD] = 3 \cdot 3 = 9,$$

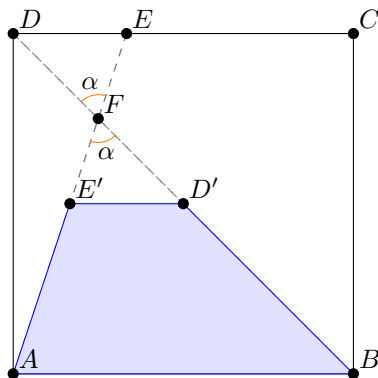
$$[ADE] = \frac{1 \cdot 3}{2} = \frac{3}{2},$$

$$[BCD] = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2},$$

więc

$$[ABD'E'] = 9 - \frac{3}{2} - \frac{9}{2} = 3.$$

Zatem szukane pole wynosi 3.





Zadanie 2. Wyznaczyć wszystkie trójki dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c spełniających układ równań

$$\begin{cases} a = bc^2 \\ b = ca^2 \\ c = ab^2 \end{cases}$$

Autor zadania: Bartosz Trojanowski

Rozwiązanie: Skoro a, b, c są dodatnie, to są niezerowe. Mnożąc dane trzy równania stronami otrzymujemy $abc = 1$. Stąd

$$a = bc^2 = \frac{c}{a} \iff c = a^2.$$

Podobne operacje przeprowadzamy na drugim i trzecim równaniu, aby w końcu otrzymać układ równań

$$\begin{cases} a = b^2 \\ b = c^2 \\ c = a^2 \end{cases}$$

Mamy więc

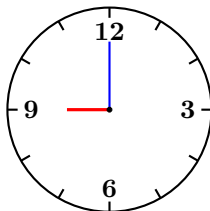
$$a = b^2 = c^4 = a^8 \implies a^7 = 1.$$

Identycznie wykazujemy, że $b^7 = 1 = c^7$, skąd wynika, że jedynym rozwiązaniem układu jest trójka $a = b = c = 1$.





Zadanie 1. Wyobraź sobie, że korzystasz z tradycyjnego zegara i wybiła godzina 9:00. Po jakim czasie wskazówki zegara utworzą kąt 90° ?



Autor zadania: Tomasz Kossakowski

Rozwiązanie: Po $32\frac{8}{11}$ minutach.

W godzinę wskazówka minutowa (niech będzie niebieska) porusza się o 360° , czyli w minutę przekreśli się o 6° .

Wskazówka godzinowa (niech będzie czerwona) porusza się o $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$, czyli przesuwa się o $0,5^\circ$ na minutę.

O godzinie 9:00 pozycja niebieskiej wskazówki to 0° , a czerwonej $-(0^\circ - 90^\circ)$.

Po t minutach pozycje to $6t^\circ$ i $0,5t^\circ - 90^\circ$. Wtedy szukamy najmniejszego $t > 0$, spełniającego równanie

$$|6t - (0,5t - 90)| = 270.$$

Wtedy $5,5t + 90 = 270$ lub $5,5t + 90 = -270$, czyli $5,5t = 180$, $t = 32\frac{8}{11}$, bo z drugiego równania wychodzi ujemny czas. ■



Zadanie 2. Rozwiąż równanie w liczbach rzeczywistych:

$$x^{2025} + x^{2024}y + x^{2023}y^2 + \dots + x^2y^{2023} + xy^{2024} + y^{2025} = 0.$$

Autor zadania: Tomasz Kossakowski

Rozwiązanie: Ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

możemy wywnioskować, że jeżeli $x - y \neq 0$ (przypadek ten sprawdzimy poniżej), to

$$x^{2025} + x^{2024}y + x^{2023}y^2 + \dots + x^2y^{2023} + xy^{2024} + y^{2025} = \frac{x^{2026} - y^{2026}}{x - y} = 0,$$

zatem $x^{2026} = y^{2026}$, wtedy $|x| = |y|$, czyli $x = y$ lub $x = -y$.

Gdy $x = y$, równanie przybiera postać

$$x^{2025} + x^{2025} + x^{2025} + \dots + x^{2025} + x^{2025} + x^{2025} = 0 \iff 2026x^{2025} = 0,$$

wtedy $(x, y) = (0, 0)$.

Gdy $x = -y$, równanie przybiera postać

$$x^{2025} - x^{2025} + x^{2025} - \dots - x^{2025} + x^{2025} - x^{2025} = 0 \iff 0 = 0,$$

czyli rozwiązaniami równania są takie x, y , że $x = -y$. ■



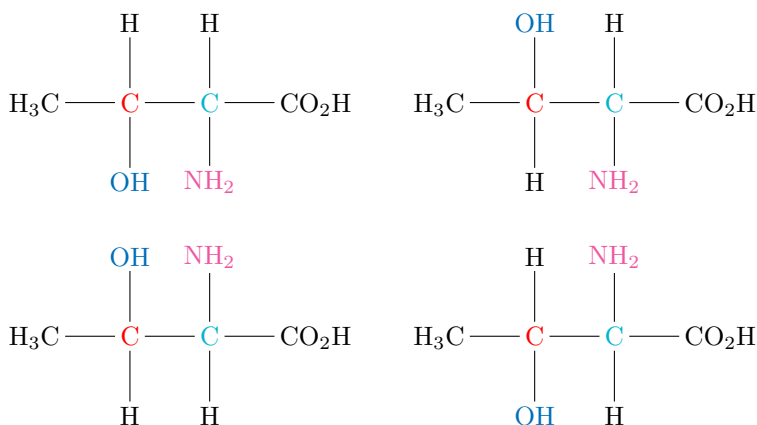
Zadanie 3. Stereoizomery to cząsteczki, które mają taki sam skład chemiczny (czyli składają się z tych samych atomów i mają taką samą liczbę każdego rodzaju atomu), mają takie same połączenia między atomami, ale różnią się przestrzennym ułożeniem tych atomów.

Wyobraź sobie to tak: masz dwa ludziki LEGO złożone z dokładnie tych samych klocków. Każdy klocek jest taki sam i jest w tej samej liczbie. Ale jeden ludek ma rękę wyciągniętą w prawo, a drugi w lewo. Niby to samo, ale wyglądają inaczej – i mogą zachowywać się inaczej, np. pasować do innych elementów w różny sposób.

W chemii stereoizomery też mogą zachowywać się inaczej – choć mają taki sam „przepis” (wzór chemiczny), to przez inne ułożenie atomów mogą mieć różne właściwości: smak, zapach, a nawet działanie w organizmie.

W chemii organicznej od każdego węgla odchodzą 4 kreski. Poniżej przedstawiono pewien związek chemiczny. Jest to kwas 2-amino-3-hydroksybutanowy (nazwa nie jest ważna). Zauważ, że ma on 4 stereoizomery (załóżmy, że odbicia lustrzane to inne stereoizomery). Grupą jest ciąg atomów połączony kreskami, którą na potrzeby zadania możemy potraktować jak atom.

Przy czerwonym węglu **C** grupa **OH** może być na górze, lub na dole. Przy niebieskim węglu **C** grupa **NH₂** — tak samo.

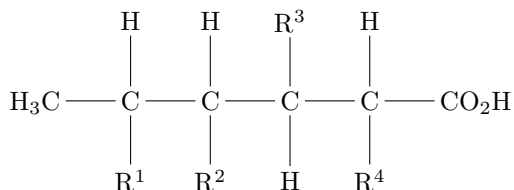


Ile stereoizomerów ma hipotetyczny związek, który między grupami



ma n węgli, gdzie od każdego węgla i odchodzi dokładnie jeden wodór H oraz jedna grupa R^i , gdzie w całym związku grupy $R^1, R^2, \dots, R^n$ są parami różne oraz inne niż H, H_3C i CO_2H ?

Dla lepszego zobrazowania, poniżej przedstawiono związek dla $n = 4$:



Autor zadania: Tomasz Kossakowski

Rozwiązanie: Zauważmy, że przy umiejscowieniu każdej grupy R^i przy i -tym atomie węgla, mamy dwie możliwości – góra i dół. Zatem z reguły mnożenia, wszystkich stereoizomerów jest

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{n \text{ dwójek, bo } n \text{ atomów węgla}} = 2^n.$$

■



Zadanie 4. Dla jakich wartości $n \in \mathbb{Z}_+$ wyrażenie

$$\frac{4n^4 - 48n^3 + 168n^2 - 144n + 60}{n^2 - 6n + 3}$$

przyjmuje wartości dodatnie całkowite?

Autor zadania: Tomasz Kossakowski

Rozwiązanie:

Sposób 1: Podzielmy wielomian $4n^4 - 48n^3 + 168n^2 - 144n + 60$ przez wielomian $n^2 - 6n + 3$:

$$\begin{array}{r} 4n^2 - 24n + 12 \\ n^2 - 6n + 3 \overline{) 4n^4 - 48n^3 + 168n^2 - 144n + 60} \\ \underline{4n^4 - 24n^3 + 12n^2} \\ -24n^3 + 156n^2 - 144n \\ \underline{-24n^3 + 144n^2 - 72n} \\ 12n^2 - 72n + 60 \\ \underline{12n^2 - 72n + 36} \\ 24 \end{array}$$

Wynika z tego, że

$$\frac{4n^4 - 48n^3 + 168n^2 - 144n + 60}{n^2 - 6n + 3} = 4n^2 - 24n + 12 + \frac{24}{n^2 - 6n + 3}.$$

Zauważmy, że żeby ta liczba była całkowita, to $n^2 - 6n + 3$ musi być dzielnikiem 24. Wyrażenie $n^2 - 6n + 3$ dla $n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ przyjmuje wartości ujemne, dla reszty liczb naturalnych – wartości dodatnie.

Dzielniki liczby 24, które będziemy rozpatrywać to

$$D_{24} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, 6, 8, 12, 24\}.$$

Dodatkowo wiadomo, że $\frac{4n^4 - 48n^3 + 168n^2 - 144n + 60}{n^2 - 6n + 3}$ jest dodatnie dla liczb całkowitych większych niż 5. Poszukajmy zatem naszych n . Żeby nie sprawdzać wszystkich dzielników, poszukajmy, które z nich są potencjalnymi kandydatami.

Rozważmy równanie:

$$n^2 - 6n + 3 = k \iff n^2 - 6n + (3 - k) = 0,$$

gdzie $k \in D_{24}$. Chcemy wyznaczyć te wartości całkowite k , dla których równanie ma całkowite rozwiązania n . Wtedy pierwiastek z wyróżnika trójkianu kwadratowego musi być całkowity parzysty:

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3 - k) = 36 - 4(3 - k) = 36 - 12 + 4k = 24 + 4k$$

$$k = \frac{m^2 - 24}{4} \quad \text{dla pewnego parzystego } m \in \mathbb{Z}_+.$$

Takiej postaci są tylko $k = -2$ i $k = 3$. Wtedy:

$$n^2 - 6n + 5 = 0 \iff n = 1 \text{ lub } n = 5$$

oraz

$$n^2 - 6n = 0 \iff n = 0 \text{ lub } n = 6.$$

Z tych rozwiązań pasujące jest tylko $n = 6$ i jest to rozwiązanie naszego zadania. ■

Sposób 2: Chcemy rozdzielić licznik jako:

$$(n^2 - 6n + 3)(An^2 + Bn + C) + D$$

Rozwijamy iloczyn:

$$(n^2 - 6n + 3)(An^2 + Bn + C) = An^4 + (B - 6A)n^3 + (C - 6B + 3A)n^2 + (-6C + 3B)n + 3C$$

Dodając resztę D , mamy:

$$An^4 + (B - 6A)n^3 + (C - 6B + 3A)n^2 + (-6C + 3B)n + (3C + D)$$

Porównujemy współczynniki z licznikiem:

$$A = 4$$

$$B - 6A = -48 \Rightarrow B = -24$$

$$C - 6B + 3A = 168 \Rightarrow C = 12$$

$$-6C + 3B = -144 \quad (\text{spełnione})$$

$$3C + D = 60 \Rightarrow D = 24$$

Podstawiając wszystko, mamy:

$$\frac{4n^4 - 48n^3 + 168n^2 - 144n + 60}{n^2 - 6n + 3} = 4n^2 - 24n + 12 + \frac{24}{n^2 - 6n + 3}$$

Zauważmy, że żeby ta liczba była całkowita, to $n^2 - 6n + 3$ musi być dzielnikiem 24. Wyrażenie $n^2 - 6n + 3$ dla $n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ przyjmuje wartości ujemne, dla reszty liczb naturalnych – wartości dodatnie.

Dzielniki liczby 24, które będziemy rozpatrywać to

$$D_{24} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, 6, 8, 12, 24\}.$$

Dodatkowo wiadomo, że $\frac{4n^4 - 48n^3 + 168n^2 - 144n + 60}{n^2 - 6n + 3}$ jest dodatnie dla liczb całkowitych większych niż 5. Poszukajmy zatem naszych n . Żeby nie sprawdzać wszystkich dzielników, poszukajmy, które z nich są potencjalnymi kandydatami.

Rozważmy równanie:

$$n^2 - 6n + 3 = k \iff n^2 - 6n + (3 - k) = 0,$$

gdzie $k \in D_{24}$. Chcemy wyznaczyć te wartości całkowite k , dla których równanie ma całkowite rozwiązania n . Wtedy pierwiastek z wyróżnika trójkianu kwadratowego musi być całkowity parzysty:

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3 - k) = 36 - 4(3 - k) = 36 - 12 + 4k = 24 + 4k$$

$$k = \frac{m^2 - 24}{4} \quad \text{dla pewnego parzystego } m \in \mathbb{Z}_+.$$

Takiej postaci są tylko $k = -2$ i $k = 3$. Wtedy:

$$n^2 - 6n + 5 = 0 \iff n = 1 \text{ lub } n = 5$$

oraz

$$n^2 - 6n = 0 \iff n = 0 \text{ lub } n = 6.$$

Z tych rozwiązań pasujące jest tylko $n = 6$ i jest to rozwiązanie naszego zadania. ■



Zadanie 1. W urnie znajdują się kule białe, niebieskie i czarne. Wiemy, że kul białych jest o 6 więcej niż kul niebieskich, ponadto prawdopodobieństwo wylosowania z pośród tych kul w jednokrotnym losowaniu kuli czarnej wynosi $\frac{1}{2}$, zaś kuli niebieskiej $\frac{1}{7}$. Ile jest kul poszczególnych kolorów?

Autor zadania: Michał Fronczek

Rozwiązanie: Oznaczmy liczby kul białych, niebieskich i czarnych kolejno przez b , n i c . Wszystkich kul jest łącznie $b + n + c$. Założenia naszego zadania prezentują się następująco:

$$\begin{cases} b = n + 6 \\ \frac{c}{b+n+c} = \frac{1}{2} \\ \frac{n}{b+n+c} = \frac{1}{7} \end{cases}$$

Z drugiego warunku, po przemnożeniu przez mianowniki dostajemy $2c = b + n + c$ czyli $c = b + n = (n + 6) + n = 2n + 6$ Podstawiając te dane do trzeciego równania dostajemy:

$$\begin{aligned} \frac{n}{b + n + c} &= \frac{1}{7} \\ \frac{n}{(n + 6) + n + (2n + 6)} &= \frac{1}{7} \\ \frac{n}{4n + 12} &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

Wymnażając przez mianowniki mamy:

$$7n = 4n + 12$$

$$3n = 12$$

$$n = 4$$

Stąd już szybko $b = n + 6 = 4 + 6 = 10$ oraz $c = b + n = 10 + 4 = 14$. Zatem kul białych, niebieskich i czarnych jest kolejno 10, 4 i 14.



Zadanie 2. Dane są dwie liczby rzeczywiste a i b takie, że liczby $a + b$, $ab\sqrt{a}$ oraz $ab\sqrt{b}$ są wymierne. Wykaż, że również a i b są wymierne.

Autor zadania: Michał Fronczek

Rozwiązanie: Zauważmy najpierw, że jeśli któraś z liczb a , b jest równa 0, to z treści dostajemy, że jeśli $a = 0$, to wymierna jest $a + b = 0 + b = b$ i odwrotnie. Stąd dla tego przypadku mamy tezę. Ponadto a i b muszą być nieujemne ze względu na zadane w założeniu pierwiastki. Zatem w dalszej części będę zakładał $a > 0$ i $b > 0$.

Faktem jest, że iloczyn liczb wymiernych też jest liczbą wymierną. W szczególności takim iloczynem jest kwadrat, a zatem liczby $(ab\sqrt{a})^2 = (ab)^2 \cdot a$ oraz $(ab\sqrt{b})^2 = (ab)^2 \cdot b$ są wymierne.

Kontynuując, wiemy że suma liczb wymiernych jest wymierna, zatem wymierna jest liczba $(ab)^2 \cdot a + (ab)^2 \cdot b = (ab)^2 \cdot (a + b)$. Wiemy jednak, że suma $a + b$ jest wymierna i niezerowa, zatem również $(ab)^2$ musi być wymierna. Wiemy ponadto, że jest niezerowa.

Rozważmy teraz różnicę liczb wymiernych. Ona również musi być wymierna, a zatem liczba $(ab)^2 \cdot a - (ab)^2 \cdot b = (ab)^2 \cdot (a - b)$ jest wymierna. Wiemy natomiast, że $(ab)^2$ jest wymierna i niezerowa, zatem również $a - b$ musi być wymierne. Mamy zatem, że $a + b$ i $a - b$ są wymierne, więc wymierne są ich suma i różnica, czyli kolejno $2a$ i $2b$. Połowa liczby wymiernej jest jednak również wymierna, więc ostatecznie wymierne muszą być a i b . To kończy dowód.



Zadanie 1. W turnieju tenisa stołowego, zorganizowanego z okazji Dnia Ojca wzięło udział 50 Ojców i 50 synów. Każdy para rozegrała jeden mecz z każdą inną parą, nie było remisów. Czy możliwe jest, aby każda z par wygrała tę samą liczbę meczów? Odpowiedź uzasadnij.

Źródło zadania: IV Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Grzegorz Rudnicki

Rozwiązanie: Taka sytuacja jest niemożliwa.

Przyjmijmy, że każda para wygrała $k \in \mathbb{Z}$ meczów. Wówczas liczba wszystkich meczów wygranych, a więc i rozegranych w turnieju wynosi $50k$. Z drugiej strony każdy zawodnik przegrał dokładnie $49 - k$ meczów. Zatem liczba wszystkich meczów przegranych, a więc i rozegranych w turnieju wynosi $50(49 - k)$. Wobec tego $50k = 50(49 - k)$, skąd obliczamy $k = \frac{49}{2} \notin \mathbb{Z}$. Otrzymaliśmy sprzeczność, która kończy rozwiązanie zadania.



Zadanie 1. Wpisz w kwadraciki wszystkie liczby od 1 do 10 tak, aby zachodziły wszystkie równości.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \square & : & \square & + & \square & = & \square \\
 - & & & & & & \times \\
 \square & & & & & & \square \\
 = & & & & & & = \\
 \square & - & \square & + & \square & = & \square
 \end{array}$$

Autor zadania: *Olimpiady i konkursy matematyczne* Henryk Pawłowski, wydanie III, Toruń 2011 r., Oficyna Wydawnicza „Tutor”

Wybór zadania: Scarlett Lafa

Rozwiązanie:

$$\begin{array}{ccccccc}
 8 & : & 4 & + & 3 & = & 5 \\
 - & & & & & & \times \\
 1 & & & & & & 2 \\
 = & & & & & & = \\
 7 & - & 6 & + & 9 & = & 10
 \end{array}$$



Zadanie 2. Wykaż, że jeśli $a \neq 0$ to

$$a^4 + \frac{250}{a^2} \geq 75.$$

Autor zadania: Scarlett Lafa

Rozwiązanie: Zauważmy, że sumę

$$a^4 + \frac{250}{a^2}$$

można zapisać jako

$$a^4 + \frac{125}{a^2} + \frac{125}{a^2}.$$

Z nierówności Cauchy'ego między średnimi wiemy, że średnia arytmetyczna danych liczb dodatnich jest większa lub równa od średniej geometrycznej tych liczb. Więc:

$$\begin{aligned} \frac{a^4 + \frac{125}{a^2} + \frac{125}{a^2}}{3} &\geq \sqrt[3]{a^4 \cdot \frac{125}{a^2} \cdot \frac{125}{a^2}} \\ a^4 + \frac{125}{a^2} + \frac{125}{a^2} &\geq 3 \cdot 5 \cdot 5 \\ a^4 + \frac{250}{a^2} &\geq 75 \end{aligned}$$





Zadanie 1. Znajdź najmniejszą liczbę całkowitą nieujemną n , że liczba

$$n^2 + n + 41$$

jest złożona.

Autor zadania: Robert Rościzak

Odpowiedź: $n = 40$.

Rozwiązanie: Ten wielomian jest znany jako Wielomian Eulera. Jego szczególną własnością jest to, że przyjmuje wartości pierwsze dla $n \leq 40$. Dla $n = 40$ mamy $40^2 + 40 + 41 = 41^2$, więc rozwiązaniem jest $n = 40$. Alternatywnie można sprawdzić pierwszość pierwszych 40 wyrazów by otrzymać wynik.



Zadanie 2. W klasie jest n chłopców i n dziewczyn. Znajdź najmniejszą taką liczbę całkowitą k taką, że jeżeli istnieje co najmniej k różnych par dzieci różnych płci, które się nawzajem znają, to da się połączyć wszystkie dzieci w pary tak, żeby sparowane osoby się znały i każda osoba miała dokładnie jednego partnera przeciwnej płci.

Autor zadania: Robert Rośczał

Odpowiedź: $k = n^2 - n + 1$.

Rozwiązanie: Zauważmy, że jeżeli $k \leq n^2 - n$, to pewien osobnik może nie znać nikogo przeciwnej płci, w związku z czym nie da się spełnić warunków zadania. Udowodnimy teraz, że $n^2 - n + 1$ wystarczy.

Sposób 1: Zastosujemy indukcję. Udowodnimy, że można znaleźć takie 2 osoby, które posiadają łącznie nie więcej niż $2n - 2$ znajomości. Wtedy możemy zastosować założenie indukcyjne dla $n - 1$, ponieważ wśród pozostałych $2n - 2$ dzieci istnieje $n^2 - n + 1 - 2n + 2 = (n - 1)^2 - (n - 1) + 1$ znajomości. Wybierzmy dowolną osobę która ma mniej niż n znajomych i dowolnego jej znajomego. Ich łączna liczba znajomych to najwyżej $(n - 1) + n$ zmniejszona o powtórzenia, czyli ich wspólną znajomość. Oznacza to, że sparowanie ich usunie $2n - 2$ znajomości i można zastosować założenie indukcyjne na pozostałe osoby, ckd.

Sposób 2: Rozważmy eksperyment losowy: Dobierzmy pary losowo, bez względu na to czy osoby się znają. Oznaczmy przez S_i czy i -ta dziewczyna zna swojego partnera. (Wtedy $S_i = 1$, inaczej $S_i = 0$.) Ponadto niech $S = S_1 + \dots + S_n$. Naszym celem jest znalezienie takiego ustawienia, że $S = n$. Obliczmy wartość oczekiwaną S :

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[S_i] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(S_i = 1) = \sum_{i=1}^n \frac{n^2 - n + 1}{n^2} = n \frac{n^2 - n + 1}{n^2} = n - 1 + \frac{1}{n}$$

Ponieważ wartość oczekiwana to średnia wszystkich wartości, to w szczególności musi istnieć wartość nie mniejsza niż $n - 1 + \frac{1}{n}$. Niech S_m będzie taką wartością. Ponieważ S przyjmuje tylko wartości całkowite, to z $S_m \geq n - 1 + \frac{1}{n}$ wynika, że $S \geq n$, więc $S_m = n$, co kończy dowód.

Sposób 3: Na mocy Twierdzenia Halla, skojarzenie w grafie dwudzielnym istnieje wtedy i tylko wtedy gdy każda grupa m chłopców zna co najmniej m różnych dziewczyn. Załóżmy przeciwnie, że dla pewnego m , istnieje grupa chłopców znająca tylko $m - 1$ dziewczyn. Wtedy każdy z nich nie zna żadnej z pozostałych $n + 1 - m$ dziewczyn, więc możemy oszacować liczbę nieistniejących znajomości przez

$$X \geq m(n + 1 - m) \geq n$$

Ostatnie przejście jest równoważne z $n \geq m > 0$. Oznacza to, że aby warunek Halla nie był spełniony, to liczba krawędzi nie może przekraczać $n^2 - n$, czyli dla $k = n^2 - n + 1$ na mocy Twierdzenia Halla istnieje skojarzenie.