



Zadanie 1. W urnie znajdują się kule białe, niebieskie i czarne. Wiemy, że kul białych jest o 6 więcej niż kul niebieskich, ponadto prawdopodobieństwo wylosowania z pośród tych kul w jednokrotnym losowaniu kuli czarnej wynosi $\frac{1}{2}$, zaś kuli niebieskiej $\frac{1}{7}$. Ile jest kul poszczególnych kolorów?

Autor zadania: Michał Fronczek

Rozwiązanie: Oznaczmy liczby kul białych, niebieskich i czarnych kolejno przez b , n i c . Wszystkich kul jest łącznie $b + n + c$. Założenia naszego zadania prezentują się następująco:

$$\begin{cases} b = n + 6 \\ \frac{c}{b+n+c} = \frac{1}{2} \\ \frac{n}{b+n+c} = \frac{1}{7} \end{cases}$$

Z drugiego warunku, po przemnożeniu przez mianowniki dostajemy $2c = b + n + c$ czyli $c = b + n = (n + 6) + n = 2n + 6$ Podstawiając te dane do trzeciego równania dostajemy:

$$\begin{aligned} \frac{n}{b + n + c} &= \frac{1}{7} \\ \frac{n}{(n + 6) + n + (2n + 6)} &= \frac{1}{7} \\ \frac{n}{4n + 12} &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

Wymnażając przez mianowniki mamy:

$$7n = 4n + 12$$

$$3n = 12$$

$$n = 4$$

Stąd już szybko $b = n + 6 = 4 + 6 = 10$ oraz $c = b + n = 10 + 4 = 14$. Zatem kul białych, niebieskich i czarnych jest kolejno 10, 4 i 14.



Zadanie 2. Dane są dwie liczby rzeczywiste a i b takie, że liczby $a + b$, $ab\sqrt{a}$ oraz $ab\sqrt{b}$ są wymierne. Wykaż, że również a i b są wymierne.

Autor zadania: Michał Fronczek

Rozwiązanie: Zauważmy najpierw, że jeśli któraś z liczb a , b jest równa 0, to z treści dostajemy, że jeśli $a = 0$, to wymierna jest $a + b = 0 + b = b$ i odwrotnie. Stąd dla tego przypadku mamy tezę. Ponadto a i b muszą być nieujemne ze względu na zadane w założeniu pierwiastki. Zatem w dalszej części będę zakładał $a > 0$ i $b > 0$.

Faktem jest, że iloczyn liczb wymiernych też jest liczbą wymierną. W szczególności takim iloczynem jest kwadrat, a zatem liczby $(ab\sqrt{a})^2 = (ab)^2 \cdot a$ oraz $(ab\sqrt{b})^2 = (ab)^2 \cdot b$ są wymierne.

Kontynuując, wiemy że suma liczb wymiernych jest wymierna, zatem wymierna jest liczba $(ab)^2 \cdot a + (ab)^2 \cdot b = (ab)^2 \cdot (a + b)$. Wiemy jednak, że suma $a + b$ jest wymierna i niezerowa, zatem również $(ab)^2$ musi być wymierna. Wiemy ponadto, że jest niezerowa.

Rozważmy teraz różnicę liczb wymiernych. Ona również musi być wymierna, a zatem liczba $(ab)^2 \cdot a - (ab)^2 \cdot b = (ab)^2 \cdot (a - b)$ jest wymierna. Wiemy natomiast, że $(ab)^2$ jest wymierna i niezerowa, zatem również $a - b$ musi być wymierne. Mamy zatem, że $a + b$ i $a - b$ są wymierne, więc wymierne są ich suma i różnica, czyli kolejno $2a$ i $2b$. Połowa liczby wymiernej jest jednak również wymierna, więc ostatecznie wymierne muszą być a i b . To kończy dowód.