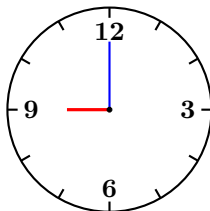




Zadanie 1. Wyobraź sobie, że korzystasz z tradycyjnego zegara i wybiła godzina 9:00. Po jakim czasie wskazówki zegara utworzą kąt 90° ?



Autor zadania: Tomasz Kossakowski

Rozwiązanie: Po $32\frac{8}{11}$ minutach.

W godzinę wskazówka minutowa (niech będzie niebieska) porusza się o 360° , czyli w minutę przekreśli się o 6° .

Wskazówka godzinowa (niech będzie czerwona) porusza się o $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$, czyli przesuwają się o $0,5^\circ$ na minutę.

O godzinie 9:00 pozycja niebieskiej wskazówki to 0° , a czerwonej $-(0^\circ - 90^\circ)$.

Po t minutach pozycje to $6t^\circ$ i $0,5t^\circ - 90^\circ$. Wtedy szukamy najmniejszego $t > 0$, spełniającego równanie

$$|6t - (0,5t - 90)| = 270.$$

Wtedy $5,5t + 90 = 270$ lub $5,5t + 90 = -270$, czyli $5,5t = 180$, $t = 32\frac{8}{11}$, bo z drugiego równania wychodzi ujemny czas. ■



Zadanie 2. Rozwiąż równanie w liczbach rzeczywistych:

$$x^{2025} + x^{2024}y + x^{2023}y^2 + \dots + x^2y^{2023} + xy^{2024} + y^{2025} = 0.$$

Autor zadania: Tomasz Kossakowski

Rozwiązanie: Ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

możemy wywnioskować, że jeżeli $x - y \neq 0$ (przypadek ten sprawdzimy poniżej), to

$$x^{2025} + x^{2024}y + x^{2023}y^2 + \dots + x^2y^{2023} + xy^{2024} + y^{2025} = \frac{x^{2026} - y^{2026}}{x - y} = 0,$$

zatem $x^{2026} = y^{2026}$, wtedy $|x| = |y|$, czyli $x = y$ lub $x = -y$.

Gdy $x = y$, równanie przybiera postać

$$x^{2025} + x^{2025} + x^{2025} + \dots + x^{2025} + x^{2025} + x^{2025} = 0 \iff 2026x^{2025} = 0,$$

wtedy $(x, y) = (0, 0)$.

Gdy $x = -y$, równanie przybiera postać

$$x^{2025} - x^{2025} + x^{2025} - \dots - x^{2025} + x^{2025} - x^{2025} = 0 \iff 0 = 0,$$

czyli rozwiązaniami równania są takie x, y , że $x = -y$. ■



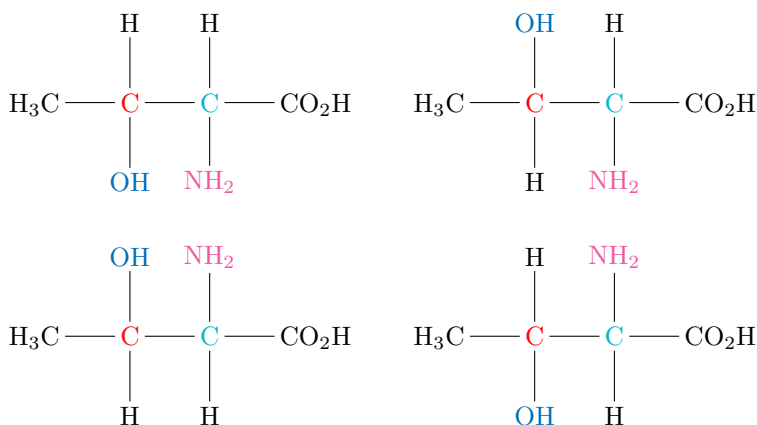
Zadanie 3. Stereoizomery to cząsteczki, które mają taki sam skład chemiczny (czyli składają się z tych samych atomów i mają taką samą liczbę każdego rodzaju atomu), mają takie same połączenia między atomami, ale różnią się przestrzennym ułożeniem tych atomów.

Wyobraź sobie to tak: masz dwa ludziki LEGO złożone z dokładnie tych samych klocków. Każdy klocek jest taki sam i jest w tej samej liczbie. Ale jeden ludek ma rękę wyciągniętą w prawo, a drugi w lewo. Niby to samo, ale wyglądają inaczej – i mogą zachowywać się inaczej, np. pasować do innych elementów w różny sposób.

W chemii stereoizomery też mogą zachowywać się inaczej – choć mają taki sam „przepis” (wzór chemiczny), to przez inne ułożenie atomów mogą mieć różne właściwości: smak, zapach, a nawet działanie w organizmie.

W chemii organicznej od każdego węgla odchodzą 4 kreski. Poniżej przedstawiono pewien związek chemiczny. Jest to kwas 2-amino-3-hydroksybutanowy (nazwa nie jest ważna). Zauważ, że ma on 4 stereoizomery (załóżmy, że odbicia lustrzane to inne stereoizomery). Grupą jest ciąg atomów połączony kreskami, którą na potrzeby zadania możemy potraktować jak atom.

Przy czerwonym węglu **C** grupa **OH** może być na górze, lub na dole. Przy niebieskim węglu **C** grupa **NH₂** — tak samo.

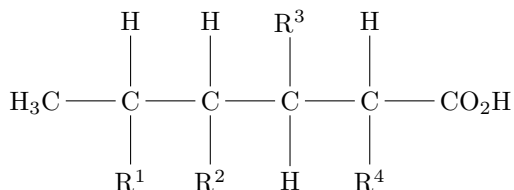


Ile stereoizomerów ma hipotetyczny związek, który między grupami



ma n węgli, gdzie od każdego węgla i odchodzi dokładnie jeden wodór H oraz jedna grupa R^i , gdzie w całym związku grupy $R^1, R^2, \dots, R^n$ są parami różne oraz inne niż H, H_3C i CO_2H ?

Dla lepszego zobrazowania, poniżej przedstawiono związek dla $n = 4$:



Autor zadania: Tomasz Kossakowski

Rozwiązanie: Zauważmy, że przy umiejscowieniu każdej grupy R^i przy i -tym atomie węgla, mamy dwie możliwości – góra i dół. Zatem z reguły mnożenia, wszystkich stereoizomerów jest

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{n \text{ dwójek, bo } n \text{ atomów węgla}} = 2^n.$$

■



Zadanie 4. Dla jakich wartości $n \in \mathbb{Z}_+$ wyrażenie

$$\frac{4n^4 - 48n^3 + 168n^2 - 144n + 60}{n^2 - 6n + 3}$$

przyjmuje wartości dodatnie całkowite?

Autor zadania: Tomasz Kossakowski

Rozwiązanie:

Sposób 1: Podzielmy wielomian $4n^4 - 48n^3 + 168n^2 - 144n + 60$ przez wielomian $n^2 - 6n + 3$:

$$\begin{array}{r} 4n^2 - 24n + 12 \\ n^2 - 6n + 3 \overline{) 4n^4 - 48n^3 + 168n^2 - 144n + 60} \\ \underline{4n^4 - 24n^3 + 12n^2} \\ -24n^3 + 156n^2 - 144n \\ \underline{-24n^3 + 144n^2 - 72n} \\ 12n^2 - 72n + 60 \\ \underline{12n^2 - 72n + 36} \\ 24 \end{array}$$

Wynika z tego, że

$$\frac{4n^4 - 48n^3 + 168n^2 - 144n + 60}{n^2 - 6n + 3} = 4n^2 - 24n + 12 + \frac{24}{n^2 - 6n + 3}.$$

Zauważmy, że żeby ta liczba była całkowita, to $n^2 - 6n + 3$ musi być dzielnikiem 24. Wyrażenie $n^2 - 6n + 3$ dla $n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ przyjmuje wartości ujemne, dla reszty liczb naturalnych – wartości dodatnie.

Dzielniki liczby 24, które będziemy rozpatrywać to

$$D_{24} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, 6, 8, 12, 24\}.$$

Dodatkowo wiadomo, że $\frac{4n^4 - 48n^3 + 168n^2 - 144n + 60}{n^2 - 6n + 3}$ jest dodatnie dla liczb całkowitych większych niż 5. Poszukajmy zatem naszych n . Żeby nie sprawdzać wszystkich dzielników, poszukajmy, które z nich są potencjalnymi kandydatami.

Rozważmy równanie:

$$n^2 - 6n + 3 = k \iff n^2 - 6n + (3 - k) = 0,$$

gdzie $k \in D_{24}$. Chcemy wyznaczyć te wartości całkowite k , dla których równanie ma całkowite rozwiązania n . Wtedy pierwiastek z wyróżnika trójkianu kwadratowego musi być całkowity parzysty:

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3 - k) = 36 - 4(3 - k) = 36 - 12 + 4k = 24 + 4k$$

$$k = \frac{m^2 - 24}{4} \quad \text{dla pewnego parzystego } m \in \mathbb{Z}_+.$$

Takiej postaci są tylko $k = -2$ i $k = 3$. Wtedy:

$$n^2 - 6n + 5 = 0 \iff n = 1 \text{ lub } n = 5$$

oraz

$$n^2 - 6n = 0 \iff n = 0 \text{ lub } n = 6.$$

Z tych rozwiązań pasujące jest tylko $n = 6$ i jest to rozwiązanie naszego zadania. ■

Sposób 2: Chcemy rozdzielić licznik jako:

$$(n^2 - 6n + 3)(An^2 + Bn + C) + D$$

Rozwijamy iloczyn:

$$(n^2 - 6n + 3)(An^2 + Bn + C) = An^4 + (B - 6A)n^3 + (C - 6B + 3A)n^2 + (-6C + 3B)n + 3C$$

Dodając resztę D , mamy:

$$An^4 + (B - 6A)n^3 + (C - 6B + 3A)n^2 + (-6C + 3B)n + (3C + D)$$

Porównujemy współczynniki z licznikiem:

$$A = 4$$

$$B - 6A = -48 \Rightarrow B = -24$$

$$C - 6B + 3A = 168 \Rightarrow C = 12$$

$$-6C + 3B = -144 \quad (\text{spełnione})$$

$$3C + D = 60 \Rightarrow D = 24$$

Podstawiając wszystko, mamy:

$$\frac{4n^4 - 48n^3 + 168n^2 - 144n + 60}{n^2 - 6n + 3} = 4n^2 - 24n + 12 + \frac{24}{n^2 - 6n + 3}$$

Zauważmy, że żeby ta liczba była całkowita, to $n^2 - 6n + 3$ musi być dzielnikiem 24. Wyrażenie $n^2 - 6n + 3$ dla $n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ przyjmuje wartości ujemne, dla reszty liczb naturalnych – wartości dodatnie.

Dzielniki liczby 24, które będziemy rozpatrywać to

$$D_{24} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, 6, 8, 12, 24\}.$$

Dodatkowo wiadomo, że $\frac{4n^4 - 48n^3 + 168n^2 - 144n + 60}{n^2 - 6n + 3}$ jest dodatnie dla liczb całkowitych większych niż 5. Poszukajmy zatem naszych n . Żeby nie sprawdzać wszystkich dzielników, poszukajmy, które z nich są potencjalnymi kandydatami.

Rozważmy równanie:

$$n^2 - 6n + 3 = k \iff n^2 - 6n + (3 - k) = 0,$$

gdzie $k \in D_{24}$. Chcemy wyznaczyć te wartości całkowite k , dla których równanie ma całkowite rozwiązania n . Wtedy pierwiastek z wyróżnika trójkianu kwadratowego musi być całkowity parzysty:

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3 - k) = 36 - 4(3 - k) = 36 - 12 + 4k = 24 + 4k$$

$$k = \frac{m^2 - 24}{4} \quad \text{dla pewnego parzystego } m \in \mathbb{Z}_+.$$

Takiej postaci są tylko $k = -2$ i $k = 3$. Wtedy:

$$n^2 - 6n + 5 = 0 \iff n = 1 \text{ lub } n = 5$$

oraz

$$n^2 - 6n = 0 \iff n = 0 \text{ lub } n = 6.$$

Z tych rozwiązań pasujące jest tylko $n = 6$ i jest to rozwiązanie naszego zadania. ■