



Zadanie 1. Kwadrat $ABCD$ ma bok długości 3. Niech E będzie takim punktem na odcinku CD , że $DE = 1$. Odcinki AE i BD przecinają się w F . Niech D', E' będą odbiciami odpowiednio punktów D, E względem F . Wyznaczyć pole czworokąta $ABD'E'$.

Autor zadania: Bartosz Trojanowski

Rozwiązanie: Przez $[X]$ będziemy oznaczać pole figury X . Trójkąty DEF i $D'E'F$ są przystające na mocy cechy bok-kąt-bok, więc mają równe pola. Stąd wynika, że

$$[ABD'E'] = [ABCD] - ([ADF] + [D'E'F]) - [BCD] = [ABCD] - [ADE] - [BCD].$$

Łatwo można obliczyć

$$[ABCD] = 3 \cdot 3 = 9,$$

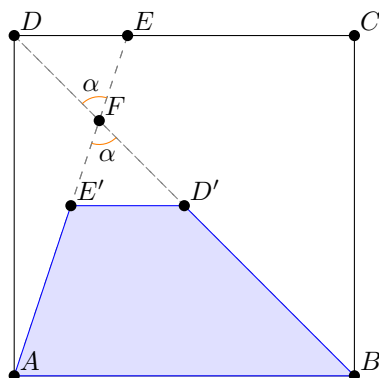
$$[ADE] = \frac{1 \cdot 3}{2} = \frac{3}{2},$$

$$[BCD] = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2},$$

więc

$$[ABD'E'] = 9 - \frac{3}{2} - \frac{9}{2} = 3.$$

Zatem szukane pole wynosi 3.





Zadanie 2. Wyznaczyć wszystkie trójki dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c spełniających układ równań

$$\begin{cases} a = bc^2 \\ b = ca^2 \\ c = ab^2 \end{cases}$$

Autor zadania: Bartosz Trojanowski

Rozwiązanie: Skoro a, b, c są dodatnie, to są niezerowe. Mnożąc dane trzy równania stronami otrzymujemy $abc = 1$. Stąd

$$a = bc^2 = \frac{c}{a} \iff c = a^2.$$

Podobne operacje przeprowadzamy na drugim i trzecim równaniu, aby w końcu otrzymać układ równań

$$\begin{cases} a = b^2 \\ b = c^2 \\ c = a^2 \end{cases}$$

Mamy więc

$$a = b^2 = c^4 = a^8 \implies a^7 = 1.$$

Identycznie wykazujemy, że $b^7 = 1 = c^7$, skąd wynika, że jedynym rozwiązaniem układu jest trójka $a = b = c = 1$.

