



Zadanie 1. Czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite a , b , c , że każda z liczb ab , bc , ca kończy się cyframi 20?

Źródło zadania: Kwadrat nr 11, Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, grudzień 2013

Wybór zadania: Antonina Pajek

Rozwiązanie: Zauważmy, że jeśli liczba kończy się cyframi 20, to dzieli się przez 5, ale nie przez 25 (bo liczby podzielne przez 25 mają dwie ostatnie cyfry 00, 25, 50 lub 75). Przypuśćmy, że istnieją opisane w zadaniu liczby a , b , c . Każda z liczb ab , bc , ca ma wówczas w rozkładzie na czynniki pierwsze dokładnie jedną piątkę. Stąd iloczyn $ab \cdot bc \cdot ca = (abc)^2$ ma w rozkładzie na czynniki pierwsze dokładnie trzy piątki, co jest niemożliwe, ponieważ jest kwadratem liczby całkowitej (wszystkie czynniki pierwsze występują parzystą liczbę razy w jego rozkładzie).



Zadanie 2. Wyznacz resztę z dzielenia 345^{679} przez 16.

Autor zadania: Antonina Pajek

Rozwiązanie: Zobaczmy że

$$345^{679} \equiv 9^{679} \pmod{16}$$

Wiemy że

$$9 \equiv 9 \pmod{16}$$

oraz

$$9^2 \equiv 1 \pmod{16}.$$

Zatem możemy rozpisać:

$$345^{679} \equiv (9^2)^{339} \cdot 9 \equiv 1 \cdot 9 = 9 \pmod{16}.$$

Zatem szukaną resztą jest 9.