



**Zadanie 1.** Wykaż, że równanie  $a^2 + b^2 = 16c^3 + 8c^2 + 4c + 3$  dla  $a, b, c$  będącymi liczbami całkowitymi dodatnimi, nie ma rozwiązań.

**Autor zadania:** Maria Janyska

**Rozwiązanie:** Skoro rozpatrujemy liczby całkowite, możemy skupić się na podzielnościach obu stron równania. Przedstawmy prawą stronę w postaci

$$4(4c^3 + 2c^2 + c) + 3 \equiv 3 \pmod{4}.$$

Przystawanie zachodzi bez względu na wartość  $c$ . Przyjrzyjmy się teraz lewej stronie równania, a dokładniej temu, jakie reszty  $\pmod{4}$  mogą przyjmować kwadraty liczb całkowitych.

|       |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|
| $n$   | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $n^2$ | 0 | 1 | 0 | 1 |

Jakie więc reszty może mieć wyrażenie  $a^2 + b^2$ ? Oczywiście może przyjmować wartości  $0 + 0 \equiv 0, 0 + 1 \equiv 1, 1 + 1 \equiv 2 \pmod{4}$ , nigdy zaś nie przyjmują reszty 3. Oznacza to, że reszta  $\pmod{4}$  lewej strony jest nierówna reszcie prawej strony, co pokazuje, że istotnie równanie nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych, co należało wykazać.

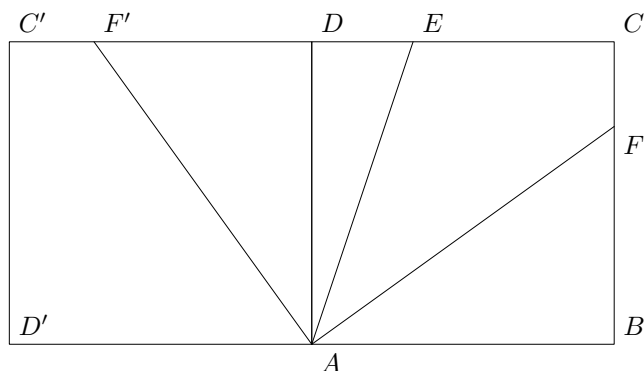


**Zadanie 2.** Na boku  $CD$  kwadratu  $ABCD$  wybrano dowolny punkt  $E$ . Dwusieczna kąta  $\sphericalangle EAB$  przecina bok  $BC$  w punkcie  $F$ . Wykaż, że  $|AE| = |DE| + |BF|$ .

**Źródło zadania:** *Matematyka. Arkusze maturalne. Poziom rozszerzony* Tomasz Masłowski, Piotr Nodzyński, Słomińska Elżbieta, Anna Toruńska, Zelek Janina, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń 2024

**Wybór zadania:** Maria Janyska

**Rozwiązanie:** Obróćmy kwadrat o  $90^\circ$  przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, tak jak na rysunku. Punkt  $F$  przechodzi na punkt  $F'$ , przy czym z własności obrotu  $\sphericalangle FAF' = 90^\circ$ .



Przekształćmy następująco prawą stronę tezy:

$$|DE| + |BF| = |DE| + |DF'| = |EF'|.$$

Musimy więc pokazać, że trójkąt  $\triangle F'EA$  jest równoramienny, co otrzymamy przez prosty rachunek kątów.

$$\begin{aligned} \sphericalangle EF'A &= \sphericalangle BFA = \sphericalangle FAD = \sphericalangle FAE + \sphericalangle EAD = \sphericalangle FAB + \sphericalangle EAD = \\ &= \sphericalangle F'AD + \sphericalangle EAD = \sphericalangle EAF' \end{aligned}$$

Skoro mamy równość kątów  $\sphericalangle EF'A = \sphericalangle EAF'$ , trójkąt  $\triangle F'EA$  jest równoramienny, co daje nam tezę o równości odcinków.