

 **Zadanie 1.** Dane są liczby rzeczywiste x, y , dla których zachodzą

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 11 \end{cases}$$

Oblicz wartość wyrażenia $x^3 + y^3$.

Autor zadania: Maria Janyska

Rozwiązanie:

Sposób 1: Zauważmy, że wyrażenie $x^3 + y^3$ można zapisać również jako iloczyn $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$. Możemy podstawić znane wartości $x + y = 8$ i $xy = 11$. Zatem mamy

$$x^3 + y^3 = 8(x^2 + y^2 - 11).$$

Pozostaje znaleźć wartość wyrażenia $x^2 + y^2$. Zapiszmy jako kwadrat sumy i podstawmy znane wartości:

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$8^2 = x^2 + y^2 + 2 \cdot 8$$

$$x^2 + y^2 = 42$$

Zatem możemy uzupełnić poszukiwaną wartość:

$$x^3 + y^3 = 8(42 - 11)$$

$$x^3 + y^3 = 248,$$

co właśnie należało znaleźć.

Sposób 2: Możemy wyznaczyć z pierwszego równania wartość y i podstawiać ją do drugiego równania. Będzie ono równaniem kwadratowym, które należy rozwiązać.

$$y = 8 - x$$

$$x(8 - x) = 11$$

$$-x^2 + 8x - 11 = 0$$

Obliczmy wyróżnik równania

$$\Delta = 8^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-11) = 64 - 44 = 20$$

$$x_1 = \frac{-8 + \sqrt{20}}{-2}, x_1 = 4 - \sqrt{5}$$

$$y_1 = 8 - (4 - \sqrt{5}) = 4 + \sqrt{5}$$

$$x_2 = \frac{-8 - \sqrt{20}}{-2}, x_2 = 4 + \sqrt{5}$$

$$y_1 = 8 - (4 + \sqrt{5}) = 4 - \sqrt{5}$$

Zauważmy, że $x_1 = y_2$ i $x_2 = y_1$. Zatem wystarczy nam policzyć sumę sześciątów tylko dla jednej pary wyznaczonych x, y .

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (4 - \sqrt{5})^3 + (4 + \sqrt{5})^3 = \\ 4^3 - 3 \cdot 4^2 \cdot \sqrt{5} + 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{5}^2 - \sqrt{5}^3 + 4^3 + 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{5}^2 + \sqrt{5}^3 &= 128 + 120 = 248, \end{aligned}$$

co należało właśnie obliczyć.



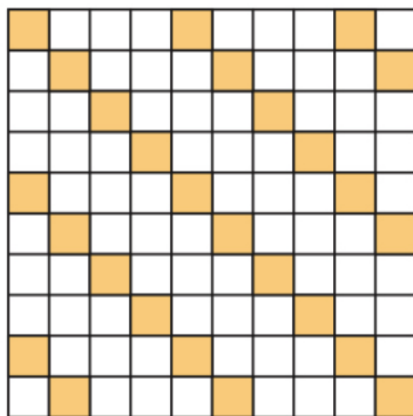
Zadanie 2. Rozstrzygnij, czy da się pokryć prostokątną tablicę o wymiarach 10×10 pionowymi i poziomymi klockami 1×4 tak, aby klocki pokryły całą tablicę i aby się nie pokrywały.

Źródło zadania: Kwadrat nr 13, Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, wrzesień 2014

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Maria Janyska

Rozwiązanie:

Sposób 1: Pokolorujmy kwadrat jak na poniższym rysunku. Każdy klocek 1×4 zajmuje dokładnie jedno kolorowe pole. Takich pól jest 26. Aby więc pokryć szachownicę, należy użyć 26 klocków. Jednak do jej pokrycia potrzebnych jest dokładnie $\frac{100}{4} = 25$ klocków. Dochodzimy do sprzeczności, odpowiedź na pytanie postawione w zadaniu jest więc negatywna.



Sposób 2: Rozważmy kolorowanie pokazane na poniższym rysunku. Każdy klocek pokrywa dwa kolorowe pola i dwa białe pola, więc wszystkie klocki powinny pokrywać łącznie tę samą liczbę białych i kolorowych pól. Tymczasem kwadrat zawiera 52 pola kolorowe oraz 48 pól białych. Dochodzimy więc znów do wniosku, że nie istnieje żądane pokrycie.

