
Zadanie 1. Do pewnego basenu prowadzą dwie rury dopływowe oraz jeden spust. Pierwsza rura napełnia cały basen w 3 godziny, druga w 4 godziny, zaś spust opróżnia pełny basen do połowy w 6 godzin. Ile czasu zajmie napełnienie pustego basenu, jeśli jednocześnie działać będą obie rury dopływowe i spust?

Autor zadania: Michał Fronczek

Rozwiązanie: Z powyższych danych wynika, że w ciągu jednej godziny pierwsza rura napełni $\frac{1}{3}$ basenu, druga zaś $\frac{1}{4}$. Spust opróżnia cały basen w 12 godzin, czyli opróżni $\frac{1}{12}$ basenu w ciągu godziny. Tak więc razem w ciągu godziny napełnione zostanie $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$ basenu, czyli cały basen zostanie napełniony w 2 godziny.

Zadanie 2. Dane są takie dodatnie liczby a, b, c , że $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ Wykaż, że zachodzi również

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2}$$

Autor zadania: Michał Fronczek

Rozwiązanie: Mnożąc stronami daną w tezie nierówność dostajemy

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \leq 1$$

Tu zaś stosując nierówność między średnią harmoniczną a arytmetyczną dostajemy:

$$\begin{aligned} \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} &= \frac{2}{\left(\frac{1}{a}\right) + \left(\frac{1}{b}\right)} + \frac{2}{\left(\frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{c}\right)} + \frac{2}{\left(\frac{1}{c}\right) + \left(\frac{1}{a}\right)} \leq \\ &\leq \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} + \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{2} + \frac{\frac{1}{c} + \frac{1}{a}}{2} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}}{2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \end{aligned}$$

To kończy dowód

