

Zadanie 1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x równanie

$$2025x - 2024x + 2023x - 2022x + \dots + 3x - 2x + x = 0.$$

Autor zadania: Bartosz Trojanowski

Rozwiązanie: Dane wyrażenie możemy przepisać jako

$$(2025x - 2024x) + (2023x - 2022x) + \dots + (3x - 2x) + x = x + x + \dots + x + x.$$

Zatem dla pewnej liczby całkowitej $n > 0$ mamy

$$nx = 0.$$

Skoro $n > 0$, to $x = 0$ i jest to jedyne rozwiązanie. ■

Zadanie 2. Udowodnij, że dla dowolnego $i, n \in \mathbb{Z}_+$, $a_i, b_i, k \in \mathbb{Z}$:

$$\left((a_1^2 + kb_1^2)(a_2^2 + kb_2^2)(a_3^2 + kb_3^2) \dots (a_i^2 + kb_i^2) \right)^n = x^2 + ky^2,$$

gdzie $x, y \in \mathbb{Z}$.

Autor zadania: Tomasz Kossakowski

Rozwiązanie: Na początek zauważmy, że dla dowolnych liczb $a, b, c, d, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} (a^2 + kb^2)(c^2 + kd^2) &= a^2c^2 + ka^2d^2 + kb^2c^2 + k^2b^2d^2 = \\ &= (ac)^2 + k(ad)^2 + k(bc)^2 + (kbd)^2 - 2abcd \cdot k + 2abcd \cdot k = \\ &= (ac)^2 - 2abcd \cdot k + (kbd)^2 + k \left((ad)^2 + 2abcd + (bc)^2 \right) = \\ &= (ac - kbd)^2 + k(ad + bc)^2 = X^2 + kY^2. \quad (1) \end{aligned}$$

Zauważmy, że $X, Y \in \mathbb{Z}$, gdyż $X = ac - kbd$, które jest całkowite oraz $Y = ad + bc$, które też jest całkowite.

Można z tego wywnioskować, że $(a_1^2 + kb_1^2)(a_2^2 + kb_2^2)$ będzie postaci $X^2 + kY^2$, ponadto mnożąc jednomiany postaci $X^2 + kY^2$ zawsze uzyskamy jednomian typu $X^2 + kY^2$. Oznacza to, że

$$(a_1^2 + kb_1^2)(a_2^2 + kb_2^2)(a_3^2 + kb_3^2) \dots (a_i^2 + kb_i^2) = A^2 + kB^2.$$

Teraz zastanówmy się, czym jest potęgowanie (z wykładnikiem całkowitym dodatnim). Potęgowanie to nic innego jak mnożenie czynnika wielokrotnie przez samego siebie. Oznacza to, że $(A^2 + kB^2)^n$ też będzie postaci $x^2 + ky^2$, a ponieważ każda z liczb a_i, b_i była całkowita, to A i B też są całkowite, a to oznacza, że x, y również są całkowite. ■