
Zadanie 1. Udowodnić, że nie istnieją dodatnie liczby całkowite m, n spełniające

$$3^m + 5^n = 2025^{2025}.$$

Autor zadania: Bartosz Trojanowski

Rozwiązanie:

Sposób 1: Zauważmy, że skoro $m, n > 0$, to jedyna liczba pierwsza dzieląca 3^m to 3, w szczególności liczba ta nie jest podzielna przez 2. Podobnie 2 nie jest dzielnikiem 5^n , czyli obie te liczby są nieparzyste. Zatem ich suma jest parzysta, jednak 2025^{2025} jest nieparzyste, a to daje sprzeczność, więc takie liczby nie istnieją. ■

Sposób 2: Zauważmy, że obie liczby $3^m, 2025^{2025}$ są podzielne przez 3, jednak jedyna liczba pierwsza dzieląca 5^n to 5, więc lewa strona równania nie jest podzielna przez 3, a prawa jest. To daje sprzeczność. ■

Problem 2. Let ABC be a triangle. Point D is the intersection of side AB with the angle bisector of $\angle ACB$. Points E and F are the orthogonal projections from point D onto lines AC and BC , respectively. Prove that $CE = CF$.

W dzisiejszych czasach matematyka i angielski to kluczowe umiejętności. Ucząc się matematyki po angielsku, zyskujemy dostęp do globalnej wiedzy i nowych możliwości. Dlatego przedstawiam to zadanie i do niego listę słów:

<i>triangle</i>	trójkąt	<i>angle bisector</i>	dwusieczna kąta
<i>side</i>	bok	<i>intersection</i>	punkt przecięcia
<i>angle</i>	kąt	<i>is equal to/equals</i>	jest równy
<i>line</i>	prosta	<i>orthogonal projection</i>	rzut prostokątny
<i>prove</i>	udowodnij		

Rozwiązanie w języku polskim dostępne jest na kolejnej stronie

Author of the problem: Tomasz Kossakowski

Solution:

Method 1: Note that $\triangle DEC \equiv \triangle DFC$ by the Angle-Side-Angle (ASA) congruence criterion: $\angle ECD = \angle FCD = \alpha$, $DC = DC$, and $\angle CDE = \angle CDF = 90^\circ - \alpha$, hence $CE = CF$.

Method 2: Let $AC = x$, $BC = y$, $AD = x'$, $BD = y'$, and let the height of triangle ABC dropped onto side AB be h (the figure is on the next page). From the angle bisector theorem:

$$\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}. \quad (1)$$

We also calculate the ratio of the areas of triangles ADC and BDC :

$$\frac{P_{ADC}}{P_{BDC}} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot h}{\frac{1}{2}BD \cdot h} = \frac{x'}{y'} \quad \text{oraz} \quad \frac{P_{ADC}}{P_{BDC}} = \frac{\frac{1}{2}AC \cdot DE}{\frac{1}{2}BC \cdot DF} = \frac{x}{y} \cdot \frac{DE}{DF}.$$

Combining equality (1) with the area ratios:

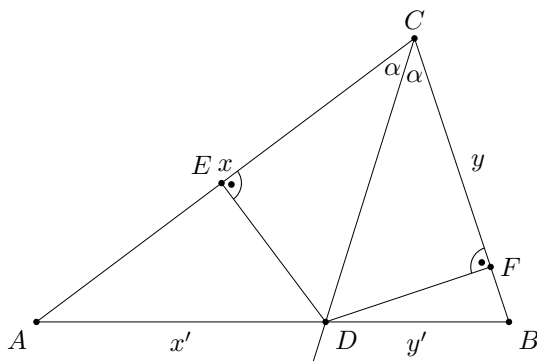
$$\frac{P_{ADC}}{P_{BDC}} = \frac{x'}{y'} = \frac{x}{y} = \frac{x}{y} \cdot \frac{DE}{DF},$$

hence $DE = DF$. From the Angle-Side-Angle congruence criterion: $\triangle DEC \equiv \triangle DFC$, because $\angle CDE = \angle CDF = 90^\circ - \alpha$, $DE = DF$ and $\angle CED = \angle CFD = 90^\circ$, hence $CE = CF$. ■

Zadanie 2. Dany jest trójkąt ABC . Punkt D jest przecięciem boku AB z dwusieczną kąta $\sphericalangle ACB$. Punkty E, F są rzutami punktu D odpowiednio na proste AC i BC . Udowodnij, że $CE = CF$.

Autor zadania: Tomasz Kossakowski

Rozwiązanie:



Sposób 1: Zauważmy, że $\triangle DEC \equiv \triangle DFC$ z mocy cechy kąt-bok-kąt: $\sphericalangle ECD = \sphericalangle FCD = \alpha$, $DC = DC$ oraz $\sphericalangle CDE = \sphericalangle CDF = 90^\circ - \alpha$, czyli $CE = CF$.

Sposób 2: Niech $AC = x$, $BC = y$, $AD = x'$, $BD = y'$ oraz niech wysokość trójkąta ABC opuszczona na bok AB to h .

Z twierdzenia o dwusiecznej:

$$\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}. \quad (2)$$

Policzmy także stosunek pól trójkątów ADC i BDC :

$$\frac{P_{ADC}}{P_{BDC}} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot h}{\frac{1}{2}BD \cdot h} = \frac{x'}{y'} \quad \text{oraz} \quad \frac{P_{ADC}}{P_{BDC}} = \frac{\frac{1}{2}AC \cdot DE}{\frac{1}{2}BC \cdot DF} = \frac{x}{y} \cdot \frac{DE}{DF}.$$

Łącząc równość (2) ze stosunkami pól:

$$\frac{P_{ADC}}{P_{BDC}} = \frac{x'}{y'} = \frac{x}{y} = \frac{x}{y} \cdot \frac{DE}{DF},$$

czyli $DE = DF$.

Z cechy kąt-bok-kąt: $\triangle DEC \equiv \triangle DFC$, gdyż $\sphericalangle CDE = \sphericalangle FDC = 90^\circ - \alpha$, $DE = DF$ oraz $\sphericalangle CED = \sphericalangle CFD = 90^\circ$, czyli $CE = CF$. ■

Zadanie 3*. Dane są liczby dodatnie a, b takie, że $a > b \geq 3$. Rozstrzygnąć, która z poniższych liczb jest większa:

$$a^b \quad \square \quad b^a.$$

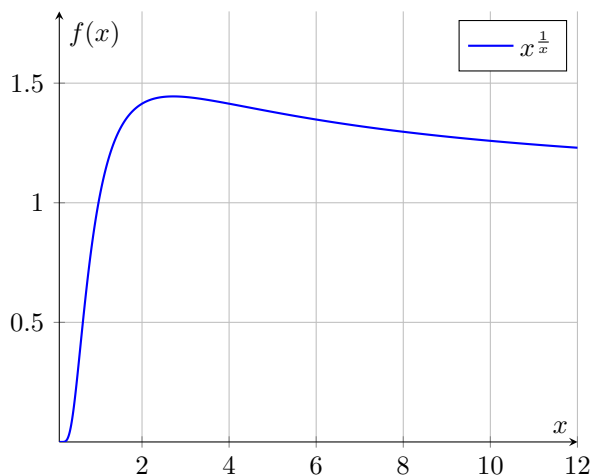
Uzasadnić, dlaczego tak jest.

Autor zadania: Tomasz Kossakowski

Rozwiązanie: Rozważmy funkcję

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} \quad \text{dla } x > 0.$$

Oto jej wykres:



Policzmy pochodną:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \left(x^{\frac{1}{x}} \right). \quad (3)$$

Na początku niech

$$y = f(x) = x^{\frac{1}{x}},$$

wtedy

$$\ln y = \ln \left(x^{\frac{1}{x}} \right) \iff \ln y = \frac{1}{x} \cdot \ln x.$$

Policzmy pochodną z obu stron:

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln x \right).$$

Wiemy, że

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

oraz

$$\frac{d}{dx}(g(x) \cdot h(x)) = \frac{dg(x)}{dx}h(x) + g(x)\frac{dh(x)}{dx}.$$

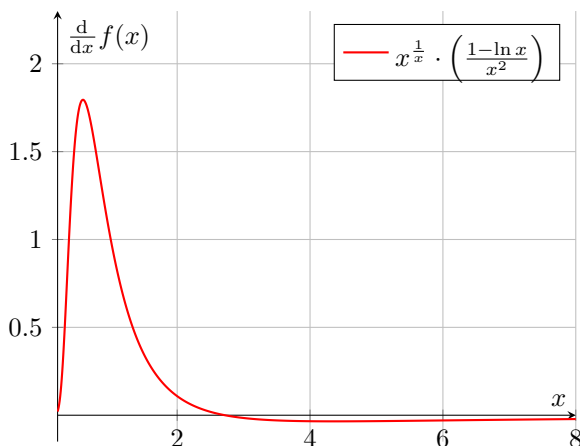
Wtedy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot \frac{-1}{x^2} \\ \frac{dy}{dx} &= y \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot \frac{-1}{x^2} \right), \end{aligned}$$

ale założyliśmy, że $y = f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, więc

$$\frac{dy}{dx} = x^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right).$$

Mamy naszą pochodną. Jej wykres wygląda tak:



Kiedy ta pochodna przyjmuje wartość 0?

$$x^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right) = 0$$

Wtedy, gdy jeden z poniższych czynników zeruje się.

$$x^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$$

Wartość funkcji $f(x) = \sqrt[x]{x} = 0$ tylko wtedy, gdy $x = 0$, gdyż pierwiastek dowolnego, niezerowego stopnia z liczby dodatniej jest dodatni. Ale $0 \not\geq 0$, bo funkcja f jest określona tylko dla $x > 0$. W tym przypadku $x \in \emptyset$.

Tak jak już stwierdziliśmy wcześniej, $x > 0$, czyli $x \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 0$. Wtedy:

$$1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1$$

$$e^{\ln x} = e^1 \Leftrightarrow x = e.$$

$$x^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right) = 0 \iff x = e$$

Skoro pochodna ma tylko jedno miejsce zerowe, oznacza to, że dla $x > e$ będzie albo zawsze ujemna, albo zawsze dodatnia. Dla jakich x będzie ona ujemna?

$$\underbrace{x^{\frac{1}{x}}}_{>0} \cdot \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right) < 0$$

$$\frac{1 - \ln x}{\underbrace{x^2}_{>0}} < 0$$

$$1 - \ln x < 0 \iff \ln x > 1 \iff x > e$$

Jeżeli pochodna funkcji jest ujemna w przedziale $(e; +\infty)$, to funkcja pierwotna jest ściśle malejąca w przedziale $(e; +\infty)$, w szczególności w przedziale $[3; +\infty)$. Oznacza to, że dla $a > b \geq 3$:

$$a^{\frac{1}{a}} < b^{\frac{1}{b}}.$$

Podnieśmy obie strony do (dodatniej) potęgi ab (i nie zmieniamy znaku nierówności):

$$a^{\frac{ab}{a}} < b^{\frac{ab}{b}}$$

$$a^b < b^a.$$

I właśnie rozwiązaliśmy zadanie. ■