
Zadanie 1. Udowodnij, że jeśli dla całkowitych dodatnich liczb a i b , a^2+2b+1 oraz b^2+2a+1 są kwadratami liczb całkowitych, to

$$a = b.$$

Źródło zadania: X OMG, zawody III stopnia

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Maja Chlewicka

Rozwiązanie: Załóżmy, że nie są równe, wówczas albo $a < b$ albo $a > b$. W pierwszym przypadku mamy:

$$b^2 < b^2 + 2a + 1 < b^2 + 2b + 1 = (b + 1)^2$$

W drugim przypadku analogicznie – w obu zatem jedna z liczb znajduje się pomiędzy kolejnymi kwadratami, więc sama nie może być kwadratem. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie. ■

Zadanie 2. Wykaż, że liczba $2^{6n+1} + 3^{2n+2}$ jest podzielna przez 11.

Źródło zadania: Podróże matematyczne

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Antonina Pajek

Rozwiązanie: Baza indukcyj: $n = 0$; nasza liczba przybiera postać:

$$21 + 32 = 11, \text{ teza działa.}$$

Założenie indukcyjne: teza zachodzi dla $n = k$ (k całkowite dodatnie):

$$2^{6k+1} + 3^{2k+2}$$

Krok Indukcyjny: dowodzę, że teza zachodzi dla $n = k + 1$, otrzymuję

$$2^{6k+7} + 3^{2k+4} = 64 \cdot 2^{6k+1} + 9 \cdot 3^{2k+2} = 9 \cdot (2^{6n+1} + 3^{2n+2}) + 55 \cdot 2^{6n+1}$$

Teraz wiemy, że część zaznaczona na zielono jest podzielna przez 11 na mocy założenia indukcyjnego, a część zaznaczona na niebiesko jest podzielna na 11 bo 11 dzieli 55. ■