

Zadanie 1. Maciej przebiegł trasę długości 18 km. Początkowo biegł równym tempem, ale po pewnym czasie zmęczył się i zwolnił o 25% na pozostałą część biegu. Gdy skończył biec, spojrzął na swój smartwatch i dowiedział się, że wolniejszym tempem biegł dwa razy dłużej niż szybszym. Jaki dystans (w kilometrach) pokonał Maciej zanim zwolnił?

Autor zadania: Maja Chlewicka

Rozwiązanie: Oznaczmy pierwotną prędkość Macieja (w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$) przez v , a przez t czas (w godzinach), w jakim biegł szybszym tempem. Wtedy jego wolniejsza prędkość jest równa $\frac{3}{4}v$, a czas, który spędził biegnąc tym tempem, jest równy $2t$. Całkowity dystans jaki przebiegł jest równy sumie dwóch częściowych dystansów, więc

$$18 = v \cdot t + \frac{3}{4}v \cdot 2t = \frac{5}{2}vt.$$

Zatem,

$$v \cdot t = 18 \cdot \frac{2}{5} = \frac{36}{5},$$

co jest dystansem przebiegniętym szybkim tempem.

Zadanie 2. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n liczba

$$2^{n+1} + 5^n$$

jest liczbą złożoną.

Źródło zadania: VIII LO im. Władysława IV w Warszawie

Wybór zadania: Antonina Pajek

Rozwiązanie: Pokażemy, że dla dowolnego całkowitego dodatniego n ta liczba dzieli się przez 3. Rozpatrzmy dwa przypadki:

- a) n jest liczbą parzystą, czyli $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$,
- b) n nie jest liczbą parzystą, czyli $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Żeby to zrobić, przypomnijmy sobie czym jest *modulo*. Tak jak w rozwiązaniach zadań z dnia 1.05.2025:

Niech $m > 1$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Mówimy, że liczba całkowita a **przystaje** do liczby całkowitej b **modulo** m , gdy $m \mid a - b$. Zapisujemy to tak:

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Relację $\cdot \equiv \cdot \pmod{m}$ nazywamy **kongruencją modulo** m (lub **według modułu** m).

Jasne jest, że $a \equiv b \pmod{m} \iff$ liczby a i b dają tę samą resztę z dzielenia przez m .

Ponadto prawdziwe są zależności:

- $a \equiv a \pmod{m}$,
- $a \equiv b \pmod{m} \implies b \equiv a \pmod{m}$,
- $a \equiv b \pmod{m} \wedge b \equiv c \pmod{m} \implies a \equiv c \pmod{m}$,
- $a \equiv b \pmod{m} \wedge c \equiv d \pmod{m} \implies a \pm b \equiv c \pm d \pmod{m}$,
- $a \equiv b \pmod{m} \wedge c \equiv d \pmod{m} \implies ab \equiv cd \pmod{m}$.
- $a \equiv b \pmod{m} \implies a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

- a) Nasza liczba jest postaci $2^{2k+1} + 5^{2k}$. Rozpatrzmy teraz poszczególne reszty modulo 3 „fragmentów” tej liczby. Fragment $2^{2k+1} = 4^k \cdot 2$ daje zawsze resztę 2 z dzielenia przez 3, dlatego, że:

$$4^k \cdot 2 \equiv 4 \cdot 2 = 8 \equiv 2 \pmod{3},$$

natomiast fragment $5^{2k} = 25^k$ daje resztę 1, dlatego że

$$25^k \equiv 25 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Zatem cała liczba daje resztę

$$2^{2k+1} + 5^{2k} \equiv 2 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

z dzielenia przez 3, więc dla n parzystego ta liczba jest złożona.

- b) Nasza liczba przybiera postać $2^{2k+2} + 5^{2k+1}$. Nasz pierwszy fragment $2^{2k+2} = 4^k \cdot 4$ daje resztę 1 z dzielenia przez 3, gdyż

$$4^k \cdot 4 \equiv 4 \cdot 4 = 16 \equiv 1 \pmod{3},$$

natomiast fragment $5^{2k+1} = 25^k \cdot 5$ daje resztę 2 z dzielenia przez 3, bo

$$25^k \cdot 5 \equiv 25 \cdot 5 \equiv 1 \cdot 2 = 2 \pmod{3},$$

zatem tak jak w przypadku wyżej cała liczba daje resztę 0 z dzielenia przez 3, więc dla każdego naturalnego n nieparzystego liczba ta jest złożona.

Podsumowując, liczba ta jest złożona dla dowolnego całkowitego dodatniego n .

UWAGA: zauważmy, że liczba ta nigdy nie będzie równa 3 ponieważ jej minimalna wartość to 9, dla $n = 1$.

