

Zadanie 1. Sekwencje DNA są stworzone z nukleotydów, z których każdy należy do jednego z typów A , T , C , G . Kodon jest stworzony z 3 nukleotydów, a łańcuch DNA jest stworzony z pewnej liczby kodonów. Znajdź najmniejszą taką liczbę n , że w dowolnym łańcuchu DNA składającym się z n nukleotydów istnieją dwa identyczne kodony.

Autor zadania: Robert Roścżak

Rozwiązanie: Rozważając odpowiedź zauważamy, że wystarczy 5 nukleotydów, aby jeden z nich się powtórzył. Prowadzi to do wniosku, którym jest Zasada Szufladkowa Dirichleta. Skorzystamy z niej w pełnym rozwiązaniu. Zauważmy, że każdy z nukleotydów można wybrać na 4 sposoby, więc jest łącznie $4^3 = 64$ różnych kodonów. Pewien kodon się powtórzy jeżeli jest ich co najmniej jeden więcej w łańcuchu, a więc 65. Ponadto, każdy kodon ma 3 nukleotydy, więc ostateczna odpowiedź to $n = 65 \cdot 3 = 195$.

Zadanie 2. Dana jest funkcja f . Wiadomo, że $f(1) = 3$. Ponadto, dla dowolnych liczb x, y jest prawdziwa zależność

$$f(x) + y = f(y) + x.$$

Znajdź wzór funkcji f .

Autor zadania: Robert Rościzak

Rozwiązanie: Rozważając równanie funkcyjne warto rozważyć pewne specjalne przypadki, w szczególności takie, w których równanie przyjmie prostszą formę. Tutaj można wykorzystać podstawienie $y = 1$, które upraszcza równanie do postaci

$$f(x) + 1 = f(1) + x$$

na mocy założenia $f(1) = 3$ upraszcza się to do

$$f(x) + 1 = 3 + x$$

czyli $f(x) = x + 2$, co jest rozwiązaniem zadania.