
Zadanie 1. Dane są dwie różne liczby pierwsze $p, q \geq 3$. Udowodnij, że ich różnica jest liczbą parzystą.

Autor zadania: Robert Rończak

Rozwiązanie: Zauważmy że liczby parzyste większe od 2 nie mogą być pierwsze, ponieważ posiadają dzielnik 2. Oznacza to, że p, q muszą być nieparzyste. Różnica dwóch liczb nieparzystych jest parzysta, co dowodzi tezy zadania.

■

Zadanie 2. Dany jest okrąg ω o środku w punkcie $O = (0, 0)$ i promieniu 1 i punkt $A = (0, 1)$. Punkt B leży na osi OX , a punkt C to przecięcie odcinka AB z okręgiem ω . Udowodnij, że zachodzi

$$|AB| \cdot |AC| = 2$$

Autor zadania: Robert Rośczał

Rozwiązanie 1: Niech M oznacza środek odcinka AC zgodnie z podpowiedzią. Wtedy podobne są trójkąty

$$\triangle MAO \sim \triangle OAB$$

Oznacza to, że zachodzi stosunek boków:

$$\frac{|MA|}{|AO|} = \frac{|OA|}{|AB|}$$

Ponieważ promień okręgu ω jest równy $|OA| = 1$, mamy:

$$|MA| \cdot |AB| = 1$$

Ponieważ $2|MA| = |AC|$, mamy:

$$|AC| \cdot |AB| = 2$$

Co było do udowodnienia. ■

Rozwiązanie 2: Na mocy potęgi punktu B względem okręgu ω zachodzi równość:

$$|BC| \cdot |BA| = |BO|^2 - |OA|^2$$

Na mocy Twierdzenia Pitagorasa zachodzi:

$$|BO|^2 = |AB|^2 - |AO|^2 = |AB|^2 - 1$$

Daje to:

$$|BC| \cdot |BA| = |AB|^2 - 2$$

$$(|AB| - |BC|) \cdot |AB| = 2$$

$$|AB| \cdot |AC| = 2$$

Co było do udowodnienia. ■

Rozwiązanie 3: Zauważmy, że punkt B jest obrazem punktu C w inwersji o środku w punkcie A i promieniu $\sqrt{2}$. Jest to prawda, ponieważ w tej inwersji okrąg ω przekształca się na oś OX , więc obraz punktu C , który jest na okręgu będzie przecięciem półprostej AC z obrazem tego okręgu, czyli osią OX . Na mocy definicji inwersji daje to:

$$|AC| \cdot |AB| = (\sqrt{2})^2 = 2. \quad \blacksquare$$