

Zadanie 1. Dany jest trójkąt ABC , którego wysokości pozostają w stosunku $20 : 15 : 12$. Na boku AB (najkrótszym boku trójkąta ABC) zbudowano trójkąt równoboczny ABD , gdzie punkt D jest po przeciwnej stronie prostej AB niż punkt C . Poprowadzono odcinki łączące punkty C oraz D z punktem E , który jest środkiem odcinka AB . Obliczyć stosunek pola trójkąta ADE do pola trójkąta BCE .

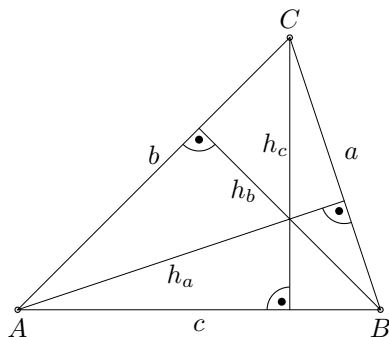
Autor zadania: Scarlett Lafa

Rozwiązanie:

Odp.: $3\sqrt{3} : 8$

Na początku sprawdzimy, jakim trójkątem jest ABC (ostrokątnym, prostokątnym czy rozwartokątnym).

Oznaczmy boki trójkąta ABC jako a, b, c , a wysokości trójkąta ABC oznaczamy odpowiednio h_a, h_b, h_c .



$$P_{ABC} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ah_b = \frac{1}{2}ah_c$$

Wiemy, że najdłuższa wysokość w trójkącie opuszczona jest zawsze na jego najkrótszy bok.

Założmy też bez straty ogólności, że bok AC jest najdłuższy.

W związku z tym $h_c : h_a : h_b = 20 : 15 : 12$, więc zapiszmy

$$\frac{1}{2}a \cdot 15x = \frac{1}{2}b \cdot 12x = \frac{1}{2}c \cdot 20x$$

Zapisaaliśmy wysokości jako $15x, 12x$ i $20x$, bo podany został tylko stosunek długości wysokości - nie podano ich długości.

Skracamy $\frac{1}{2}x$ i otrzymujemy:

$$15a = 12b = 20c.$$

Wyrażmy długości boków względem długości jednego z nich (tutaj: a):

$$\begin{aligned} 12b &= 15a \\ b &= \frac{15}{12}a \\ b &= \frac{5}{4}a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20c &= 15a \\ c &= \frac{15}{20}a \\ c &= \frac{3}{4}a. \end{aligned}$$

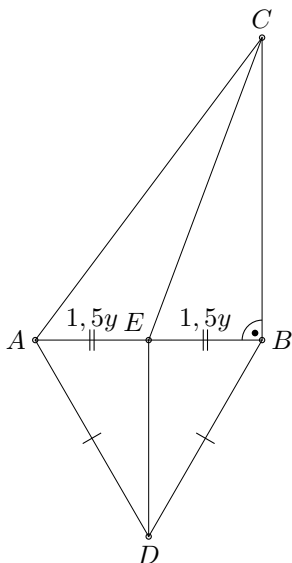
Zauważmy, że

$$a^2 + c^2 = a^2 + \frac{9}{16}a^2 = \frac{25}{16}a^2$$

oraz

$$b = \frac{5}{4}a \implies b^2 = \frac{25}{16}a^2,$$

czyli $b^2 = a^2 + c^2$ i z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa wynika, że trójkąt ABC jest prostokątny.



Boki trójkąta ABC pozostają w stosunku $3 : 4 : 5 = |AB| : |BC| : |AC|$. Oznaczmy więc bok BC jako $4y$ i bok AB jako $3y$.

Obliczmy pole trójkąta BCE :

$$P_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot 4y \cdot \frac{3}{2}y = 3y^2.$$

Znając właściwości trójkąta równobocznego obliczamy pole trójkąta ADE (połowę pola trójkąta ABD):

$$P_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(3y)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{9y^2 \sqrt{3}}{8}.$$

Obliczamy stosunek pól trójkątów:

$$\frac{P_{ADE}}{P_{BCE}} = \frac{\frac{9y^2 \sqrt{3}}{8}}{3y^2} = \frac{9y^2 \sqrt{3}}{8 \cdot 3y^2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Zadanie 2. Rozstrzygnąć, czy liczba

$$|53^{35} - 35^{53}|$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Autor zadania: Scarlett Lafa

Rozwiązanie:

Odp.: Liczba ta nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Każda liczba będąca kwadratem liczby całkowitej spełnia następujące warunki:

- (1) jest większa lub równa zero,
- (2) daje resztę 1 lub 0 z dzielenia przez 4.

Warunek (1) jest spełniony, bo $|53^{35} - 35^{53}| \geq 0$.

Wprowadźmy następującą definicję (zgodnie z książką *Matematyka olimpijska: Algebra i teoria liczb* autorstwa p. Adama Neugebauera):

Niech $m > 1$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Mówimy, że liczba całkowita a **przystaje** do liczby całkowitej b **modulo** m , gdy $m \mid a - b$. Zapisujemy to tak:

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Relację $\cdot \equiv \cdot \pmod{m}$ nazywamy **kongruencją modulo** m (lub **według modułu** m).

Jasne jest, że $a \equiv b \pmod{m} \iff$ liczby a i b dają tę samą resztę z dzielenia przez m .

Ponadto prawdziwe są zależności:

- (1) $a \equiv a \pmod{m}$,
- (2) $a \equiv b \pmod{m} \implies b \equiv a \pmod{m}$,
- (3) $a \equiv b \pmod{m} \wedge b \equiv c \pmod{m} \implies a \equiv c \pmod{m}$,

(4) $a \equiv b \pmod{m} \wedge c \equiv d \pmod{m} \implies a \pm b \equiv c \pm d \pmod{m}$,

(5) $a \equiv b \pmod{m} \wedge c \equiv d \pmod{m} \implies ab \equiv cd \pmod{m}$.

(6) $a \equiv b \pmod{m} \implies a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

Udowodnijmy teraz warunek (2):

$$a \equiv 0 \pmod{4} \implies a^2 \equiv 0^2 = 0 \pmod{4}$$

$$a \equiv 1 \pmod{4} \implies a^2 \equiv 1^2 = 1 \pmod{4}$$

$$a \equiv 2 \pmod{4} \implies a^2 \equiv 2^2 = 4 \equiv 0 \pmod{4}$$

$$a \equiv 3 \pmod{4} \implies a^2 \equiv 3^2 = 9 \equiv 1 \pmod{4}$$

Dlaczego sprawdziliśmy już wszystkie kwadraty liczb całkowitych? Zauważmy, że jedyne możliwe reszty z dzielenia przez 4 to $\{1, 2, 3, 4\}$.

Sprawdźmy, czy warunek (2) też jest spełniony. Zauważmy, że

$$53^{34} = (53^{17})^2 \quad \text{oraz} \quad (53^{17})^2 \equiv 1 \pmod{4},$$

ponieważ 53^{34} jest kwadratem liczby nieparzystej.

Zatem:

$$53^{34} \cdot 53 \equiv 1 \cdot 53 \pmod{4}$$

$$53^{35} \equiv 53 \pmod{4}$$

$$53^{35} \equiv 53 \pmod{4}$$

$$53 \equiv 5 \pmod{4}$$

Analogicznie:

$$35^{52} = (35^{26})^2 \quad \text{oraz} \quad 35^{52} \equiv 1 \pmod{4},$$

bo 35^{52} jest kwadratem liczby całkowitej parzystej.

$$35^{52} \cdot 35 \equiv 1 \cdot 35 \pmod{4}$$

$$35^{53} \equiv 35 \pmod{4}$$

$$35^{53} \equiv 35 \equiv 3 \pmod{4}$$

Więc:

$$|53^{35} - 35^{53}| \equiv |5 - 3| \equiv 2 \pmod{4}.$$

W związku z tym liczba $|53^{35} - 35^{53}|$ nie może być kwadratem liczby całkowitej.