

Zadanie 1. Tomek wybrał się na przejażdżkę rowerową. Łącznie przejechał 28 km, przy czym pierwszą część drogi jechał po piasku z prędkością $16 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a drugą po asfalcie z prędkością $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Na całej trasie osiągnął prędkość średnią $24 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ile kilometrów jechał po piasku, a ile po asfalcie?

Autor zadania: Michał Fronczek

Rozwiązanie: Wprowadźmy następujące oznaczenia:

s_c - cała droga przebyta przez Tomka

s_1 - długość drogi po piachu

s_2 - długość drogi po asfalcie

t_c - cały czas jazdy

t_1 - czas przebycia pierwszego odcinka

t_2 - czas przebycia drugiego odcinka

v_1 - prędkość na pierwszym

v_2 - prędkość na drugim odcinku

$v_{\text{śr}}$ - średnia prędkość na całej trasie

Z definicji prędkości średniej mamy

$$v_{\text{śr}} = \frac{s_c}{t_c} \iff t_c = \frac{s_c}{v_{\text{śr}}} = \frac{28}{24} = \frac{7}{6}.$$

W takim razie

$$t_1 + t_2 = t_c = \frac{7}{6}.$$

Analogicznie z definicji prędkości średniej dostajemy, że:

$$24 = v_{\text{śr}} = \frac{s_c}{t_c} = \frac{s_1 + s_2}{t_c} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_c} = \frac{16t_1 + 30t_2}{\frac{7}{6}},$$

czyli po przemnożeniu stronami przez $\frac{7}{6}$

$$28 = 16t_1 + 30t_2 \iff 30t_2 = 28 - 16t_1 \iff t_2 = \frac{14 - 8t_1}{15}.$$

Podstawiając to do wcześniejszego równania dostajemy

$$\frac{7}{6} = t_1 + t_2 = t_1 + \frac{14 - 8t_1}{15}.$$

Mnożąc stronami przez 30 mamy

$$35 = 30t_1 + 28 - 16t_1 \iff 7 = 14t_1 \iff t_1 = \frac{1}{2}.$$

Stąd

$$t_2 = \frac{14 - 8t_1}{15} = \frac{14 - 8\frac{1}{2}}{15} = \frac{14 - 4}{15} = \frac{2}{3}.$$

Ostatecznie:

$$s_1 = v_1 t_1 = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8$$

$$s_2 = v_2 t_2 = 30 \cdot \frac{2}{3} = 20$$

Odpowiedź: Tomek przejechał 8 km piaskiem i 20 km asfaltem.

Zadanie 2. Robert znalazł w swoim pokoju pewną liczbę pudełek z zapalkami. W każdym po 41 zapalek, ma też kilka pustych. Postanowił zagrać z Marysią w następującą grę:

na początku kładą wszystkie pełne pudełka na stosie po lewej stronie, a puste odkładają na bok. Następnie na zmianę wykonują ruchy. Każdy gracz w swoim ruchu ma do wyboru jedną z czterech operacji, którą wykona:

- a) Zabiera do siebie ze stosu po lewej stronie jedno pudełko z zapalkami.
- b) Zabiera jedno pudełko ze stosu po lewej stronie, po czym wysypuje zawierające się w nim zapalki na kupkę po prawej stronie, puste pudełko odrzuca i jedną zapalkę z tego stosu bierze do siebie.
- c) Zabiera ze stosu po prawej stronie 41 zapalek i pakuje je do pustego pudełka, odkłada na kupkę po lewej stronie i z prawej kupki bierze jeszcze jedną zapalkę do siebie.
- d) Zabiera do siebie jedną zapalkę z prawej kupki.

Grę zaczyna Marysia. Wygrywa gracz, który zabierze ostatnią zapalkę. Określ w zależności od liczby pełnych pudełek kto ma strategię wygrywającą.

Autor zadania: Michał Fronczek

Rozwiązanie: Zobaczmy, jak zmienia się łączna liczba zapalek na lewym i prawym stosie po każdym ruchu z punktu widzenia podzielności przez 2.

- a) tutaj odrzucamy jedno pudełko, czyli 41.
- b) przerzucenie części zapalek z lewej kupki na prawą nas nie interesuje, bo patrzymy naraz na dwie kupki. Więc sumarycznie zmiana ilości jest o jedną zapalkę.
- c) Analogicznie jak w b) zmiana jest tylko o jedną zapalkę.
- d) Tu odrzucamy jedną zapalkę z prawego stosu, więc też tyle wyniesie zmiana.

Podsumowując każdy ruch zmienia parzystość łącznej liczby zapalek na stosach. Zauważmy ponadto, że jeśli gracz A zmienił w swoim ruchu parzystość łącznej

liczby zapalek, to po ruchu gracza B parzystość ta wróci znowu do stanu sprzed ruchu gracza A. Oznacza to że A zawsze zmienia łączną ilość zapalek z nieparzystej na parzystą, a B z parzystej na nieparzystą, albo odwrotnie. Rozważmy dwa przypadki:

1. Liczba pudełek zapalek jest nieparzysta.

Tutaj na początku mamy nieparzyste wiele zapalek, więc Maria w swoim ruchu, jako że zaczyna, zawsze będzie zmieniać łączną liczbę zapalek z nieparzystej na parzystą, a Robert z parzystej na nieparzystą. Tak więc tylko Maria może zmienić łączną liczbę zapalek na 0, czyli wygrać. Tak też się stanie, bo zapalek jest skończenie wiele i z każdym ruchem maleje, więc kiedyś wreszcie osiągnie 0, czyli gra się skończy, a musi wygrać Maria.

2. Liczba pudełek zapalek jest parzysta.

Tutaj przeprowadzamy rozumowanie analogiczne do 1., ale teraz to Robert zmienia łączną liczbę zapalek z nieparzystej na parzystą, więc to on wygra grę.

Odpowiedź Jeśli pudełek zapalek było na początku nieparzyste wiele wygra Maria, w przeciwnym wypadku wygra Robert