



Rozwiązania zadań
z 24.04.2025
Następnych zadań możecie
spodziewać się już jutro!

Zadanie 1. Wyznacz wartość wyrażenia

$$\text{NWD}(135, 2025, 2070).$$

Autor zadania: Tomasz Kossakowski

Rozwiązanie:

Sposób 1: Rozłóżmy wszystkie liczby na czynniki pierwsze. Otrzymujemy:

$$135 = 3^3 \cdot 5,$$

$$2025 = (45^2) = (3^2 \cdot 5)^2 = 3^4 \cdot 5^2,$$

$$2070 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 23.$$

Największym wspólnym dzielnikiem tych liczb jest zatem $45 = 3^2 \cdot 5$, gdyż:

$$135 = (3^2 \cdot 5) \cdot 3,$$

$$2025 = (3^2 \cdot 5) \cdot 3^2 \cdot 5,$$

$$2070 = (3^2 \cdot 5) \cdot 2 \cdot 23.$$

Sposób 2: Zgodnie z algorytmem Euklidesa:

$$\text{NWD}(a, b) = \text{NWD}(a, b - a).$$

Stosując w zadaniu:

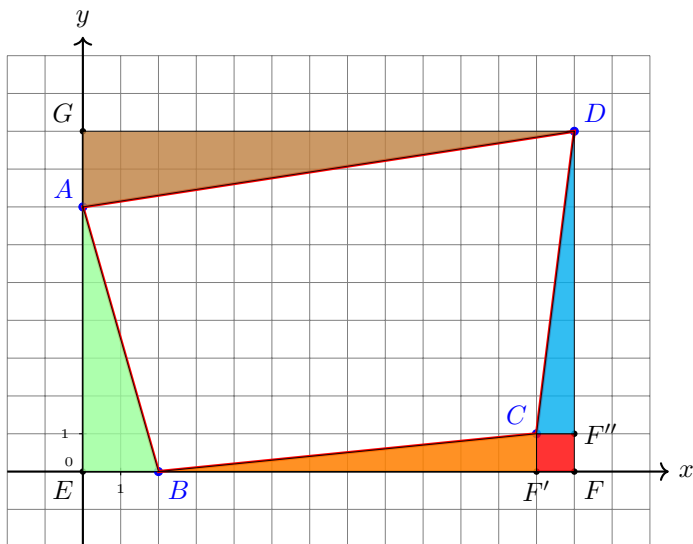
$$\begin{aligned} \text{NWD}(135, 2025, 2070) &= \text{NWD}(135, 2025, 2070 - 2025) = \\ &= \text{NWD}(135, 2070 - 2025, 2070) = \text{NWD}(135, 45, 2070) = \text{NWD}(45, 2070) = 45 \end{aligned}$$

Odpowiedź: $\text{NWD}(135, 2025, 2070) = 45$.

Zadanie 2. Staś do kartezjańskiego układu współrzędnych wpisał punkty: $A = (0, 7)$, $B = (2, 0)$, $C = (12, 1)$ oraz $D = (13, 9)$. Udowodnij, że czworokąt $ABCD$ ma pole równe 87.

Autor zadania: Tomasz Kossakowski

Rozwiązanie:



Zauważmy, że czworokąt $ABCD$ możemy bez problemu zmieścić w prostokącie o wymiarach 13×9 .

Niech $E = (0, 0)$, $F = (13, 0)$, $G = (0, 9)$, $F' = (12, 0)$, $F'' = (13, 1)$. Wtedy tym prostokątem jest $EFDG$. Dla uproszczenia zapisu niech $[F]$ oznacza pole figury F . Zatem, patrząc na rysunek powyżej, jesteśmy w stanie stwierdzić, że:

$$\begin{aligned}
 [ABCD] &= [EFDG] - [ABE] - [BCF'] - [CF'F''] - [CDF''] - [ADG] = \\
 &= 13 \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 7 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10 - 1 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 13 = 87.
 \end{aligned}$$

Co kończy dowód.



Rozwiązania zadań
z 24.04.2025
Następnych zadań możecie
spodziewać się już jutro!

Zadanie 3. Niech α będzie ustaloną dodatnią liczbą całkowitą. Na tablicy napisane są liczby 1, 2, 3. Co minutę Bartek wybiera dwie dowolne liczby z tablicy, oznaczmy je przez x , y , ściera je i na ich miejsce wpisuje liczby $\alpha x + \alpha y$ oraz $\alpha x - \alpha y$. Znaleźć wszystkie takie α , że na tablicy może pojawić się liczba 7.

Autor zadania: Bartosz Trojanowski

Rozwiązanie:

Zauważmy, że obie liczby $\alpha x + \alpha y$, $\alpha x - \alpha y$ są podzielne przez α . Aby więc jedna z nich była równa 7, to α musi być dzielnikiem 7, czyli α musi być równe 1 lub 7.

Dla $\alpha = 7$, liczba $2\alpha - \alpha$ spełnia warunki zadania, a dla $\alpha = 1$, możemy otrzymać liczby 1, 1, 5 przez wykonanie operacji na liczbach 2, 3, po czym możemy dodać 5 do 1 aby uzyskać 6, którą możemy potem dodać do 1 i otrzymać 7. Podsumowując, jedyne liczby spełniające warunki zadania to $\alpha \in \{1, 7\}$.