

I Flash matematyczny dla szkół podstawowych

Przeprowadzony w dniu 9.05.2025 w I Społecznej Szkole
Podstawowej im. Mikołaja Reja w Kielcach

Broszura z zadaniami i rozwiązaniami

Wybór zadań i redakcja rozwiązań:

Scarlett Lafa, Tomasz Kossakowski, Antonina Pajek,
Bartosz Trojanowski, Maria Janyska, Robert Rończak,
Maja Chlewicka, Michał Fronczek, Grzegorz Rudnicki

Redakcja broszury i skład $\text{\LaTeX}$:

Tomasz Kossakowski, Grzegorz Rudnicki, Antoni Syska

Organizacja:

Projekt Mathlovers
mathlovers.eu



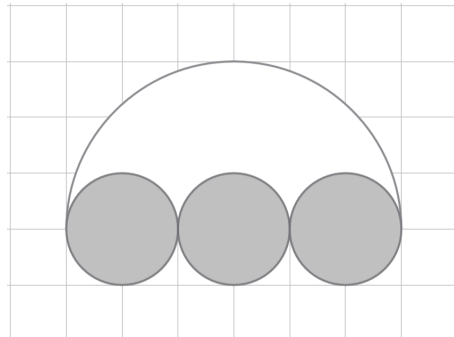
BROSZURA JEST CHRONIONA PRAWEM AUTORSKIM

Zadania

Zadanie 1. Oblicz i wynik podaj w cyfrach arabskich: $\text{MMMCDLIX} - \text{CMXC} + \text{XL} = ?$.

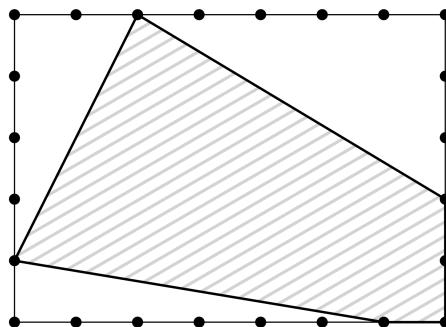
Zadanie 2. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle ACB = 40^\circ$. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC , przy czym $\sphericalangle APB = 80^\circ$. Oblicz w stopniach wartość wyrażenia $\sphericalangle CAP + \sphericalangle CBP$.

Zadanie 3. W układzie współrzędnych dane są trzy okręgi i jeden półokrąg, jak na rysunku. Wyznacz stosunek pól części szarej do białej.

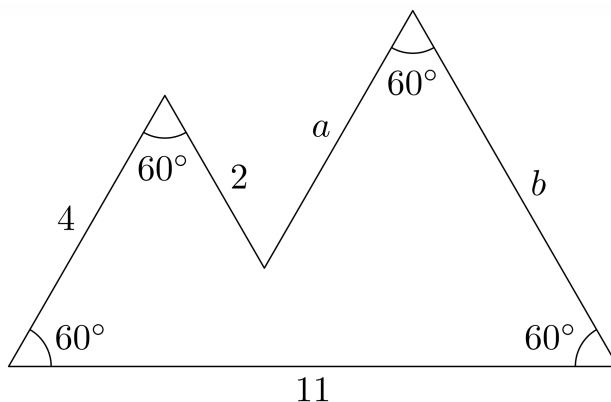


Zadanie 4. W szufladzie Kasi leży 10 niesparowanych par skarpetek. Kasia wie, że każda para ma inny kolor. Ile skarpetek musi wyciągnąć (bez zwracania), aby mieć pewność, że wśród wyciągniętych znajdują się 2 tego samego koloru.

Zadanie 5. Jarek, największa gwiazda wśród architektów, chce zbudować bardzo nowoczesną pięciokątną willę na prostokątnej posesji o wymiarach $35 \text{ m} \times 25 \text{ m}$. Powierzchnia działki przeznaczona na budowę jest zaznaczona na rysunku obok (kolejne kropki na brzegu wyznaczają odległości 5 m). Jaką część powierzchni posesji zajmuje pięciokąt, na planie którego zostanie zbudowana willa?



Zadanie 6. Na poniższym obrazku przedstawiono pięciokąt, w którym dane są niektóre miary kątów i długości boków. Wyznacz $a + b$.



Zadanie 7. Asia i Bartek zbierali kamyczki na plaży. Asia zebrała o 49 kamyczków więcej niż Bartek, więc postanowiła się z nim podzielić. Dała Bartkowi 11 swoich kamyczków. O ile więcej kamyczków ma teraz Asia niż Bartek?

Zadanie 8. Trzy siostry są w różnym wieku, a średnia ich wieku wynosi 10 lat. Każda z sióstr wyznaczyła poprawnie średnią wieku dwóch pozostałych sióstr, przy czym dwa z tych wyników wyniosły odpowiednio 11 i 12 lat. Ile lat ma najstarsza siostra?

Zadanie 9. Do sklepu z drobiazgami przywieziono 200 ceramicznych skarbonek. Ustalono cenę sprzedaży 35 zł za sztukę. Po sprzedaniu 30% skarbonek zauważono, że część z nich ma ślady pęknięć. Uszkodzone skarbonki odłożono. Żeby uzyskać jednak zaplanowany przychód pozostałe sprzedano po 50 zł za sztukę. Ile było uszkodzonych skarbonek?

Zadanie 10. Jeśli średnia arytmetyczna czterech różnych liczb całkowitych dodatnich wynosi 10, to jaka jest największa możliwa wartość jednej z tych liczb?

Zadanie 11. Uczniowie na lekcji przygotowują solanki o różnym stężeniu. Nauczyciel zapytał uczniów jak stężony musi być roztwór soli 1 o masie 2 kg, aby po dodaniu soli 2 o stężeniu 10% otrzymać sól 3 o stężeniu 15% i masie 7 kg. Odpowiedz na pytanie nauczyciela.

Zadanie 12. Logarytmem liczby b przy podstawie a nazywamy taką liczbę x , że a podniesione do potęgi x daje liczbę b :

$$\log_a b = x \iff a^x = b.$$

Korzystając z informacji podanych powyżej, oblicz wartość wyrażenia

$$\left(\log_{\sqrt{3}} 9 + \log_2 512\right)^2.$$

Zadanie 13. Dany jest sześciokąt foremny $ABCDEF$. Odcinki AF i BC przedłużono tak, że się przecinają. Niech P będzie tym punktem przecięcia. Znaleźć stosunek:

$$\frac{|AP| + |BP|}{|DE|}.$$

Zadanie 14. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przypadkowo wybrany dzielnik naturalny liczby 20 jest mniejszy niż 5?

Zadanie 15. Szóstka przyjaciół bawi się w detektywów i szpiegów. Jeden z nich został wybrany na detektywa i na chwilę wyszedł z pokoju. Pozostała piątka wybiera spośród siebie dwóch szpiegów. Szpiegzy zawsze kłamią, a wszyscy pozostali zawsze mówią prawdę. Detektyw wraca do pokoju i próbuje ustalić, kto jest szpiegiem. Piątka przyjaciół odpowiedziała mu w następujący sposób (liczba w nawiasie odpowiada numerowi gracza).

Ala (1): „Dominik to szpieg.”

Bartek (2): „Celina nie jest szpiegiem.”

Celina (4): „Bartek na pewno nie jest szpiegiem.”

Dominik (8): „Edek nie jest szpiegiem.”

Edek (16): „Bartek jest szpiegiem.”

Jaka jest suma numerów szpiegów?

Zadanie 16. Pięć przyjaciółek chce podzielić między siebie pięć deserów (każdego jest dokładnie jedna sztuka i każda dziewczyna ma zjeść dokładnie jeden deser w całości): *lody truskawkowe*, *lody czekoladowe*, *ciasto waniliowe*, *ciasto czekoladowe*, *truskawki*. Ala nie lubi truskawek. Dominika jest fanką ciast, ale ma uczulenie na czekoladę, a Celina kocha świeże owoce. Basia ma ochotę na coś truskawkowego. Ela woli ciasto od lodów. Co ma zjeść Ala, żeby wszystkie koleżanki były zadowolone?

Zadanie 17. Dany jest trójkąt, którego dwa kąty są równe 30° i 105° . Bok naprzeciw kąta 30° ma długość $2\sqrt{2}$. Znajdź długość boku naprzeciw kąta 105° .

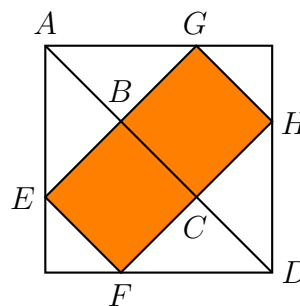
Zadanie 18. Patryk tworzy plan nauki na najbliższych pięć godzin. Chce poświęcić trzy jednogodzinne bloki nauki matematyce i dwa jednogodzinne bloki nauki fizyce. Na ile sposobów Patryk może zaplanować te pięć godzin?

Zadanie 19. Beczka z wodą waży 120 kg. Gdy odlejemy 75% wody, to waga beczki z wodą będzie wynosić x kg. Ile waży woda, a ile beczka? Jakie warunki musi spełniać liczba x , by zadanie miało rozwiązanie? Odpowiedź podaj w formie $a < x < b$.

Zadanie 20. Maja ma o 3 lata więcej niż Tosia. Lena za 5 lat temu miała 2 razy mniej lat mniej niż Hania będzie miała za 3 lata. 2 lata temu cztery dziewczyny miały w sumie 37 lat, a Hania za rok będzie miała tyle lat, ile Tosia rok temu. Ile lat będą miały w sumie Lena i Hania za 2 lata?

Zadanie 21. Przez $n!$ oznaczamy liczbę $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Wyznaczyć najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą n o następującej własności: ostatnie trzy cyfry w zapisie dziesiętnym liczby $n!$ to 0.

Zadanie 22. Na rysunku obok widnieją 3 kwadraty. Wyznaczyć pole pomarańczowego obszaru wiedząc, że długość boku największego kwadratu wynosi 3.



Zadanie 23. Romb zbudowany jest z 2 trójkątów równoramiennych o bokach 6 m, 60 dm, 800 cm. Oblicz pole tego rombu. Wynik podaj w metrach kwadratowych.

Zadanie 24. Kran A napełnia wannę w 15 min, natomiast kran B w 20 min. Niestety korek w wannie jest nieszczelny i w ciągu 60 min cała woda wypływa z wanny. Po ilu minutach napełniona będzie cała wanna, jeżeli na początku odkręcimy jednocześnie oba krany?

Zadanie 25. Oskar napisał sumę kwadratów dwóch liczb, jak na rysunku. Niestety, niektóre cyfry są niewidoczne z powodu zalania atramentem. Jaka jest ostatnia cyfra pierwszej liczby?

$$(23\text{...})^2 + (1\text{...}2)^2 = 7133029$$

Zadanie 26. Podaj czwórkę liczb (x, y, z, t) spełniającą układ równań:

$$\begin{cases} x + y + z = 14 \\ x + y + t = 10 \\ y + z + t = 15 \\ x + z + t = 12 \end{cases}$$

Zadanie 27. Przedstawione zostały pewne liczby w języku Quenya¹:

<i>neldë</i>	3	<i>enquë yucainen</i>	26
<i>canta</i>	4	<i>minë nelcainen</i>	31
<i>lempë</i>	5	<i>cancainen</i>	40
<i>otso</i>	7	<i>atta tolcainen</i>	82
<i>tolto</i>	8	<i>atta tolcainen tuxa</i>	182
<i>nelcëa</i>	13	<i>nertë nelcainen lemtuxa</i>	539
<i>encëa</i>	16		

Jak słownie w języku Quenya zapiszemy wynik poniższego działania?

$$tolcëa + enquë cancainen$$

Zadanie 28. Kwadrat podzielono na dwa prostokąty, w których stosunek obwodów wynosi 7 : 5. Ile jest równy stosunek pól tych prostokątów?

Zadanie 29. Dany jest 18-kąt foremny. Jaka jest suma miar trzech sąsiadujących kątów wewnętrznych w tej figurze?

Zadanie 30. Znajdź najmniejszą taką liczbę naturalną n , że:

- $n + 1$ jest podzielne przez 6.
- $n - 2$ jest podzielne przez 11.
- n jest podzielne przez dokładnie jedną z liczb 5, 7.

Zadanie 31. Dwóch ludzi jedzie rowerami jeden ku drugiemu. Dzieli ich 20 km. W momencie, gdy wyjeżdżają, mucha siedząca na kierownicy jednego zaczyna lot w stronę drugiego. Dolatuje do drugiej kierownicy i wraca na pierwszą. Mucha lata tam i z powrotem tak długo, aż rowery się spotkają. Jeżeli każdy rower jechał ze stałą prędkością $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a mucha latała również ze stałą prędkością $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, to ile kilometrów w sumie pokonała mucha?

Zadanie 32. Bartek ma w swojej szufladzie skarpety w czterech kolorach: 8 czerwonych, 6 żółtych, 5 zielonych i 4 niebieskie. Ile najwięcej skarpet może wyciągnąć by mieć szansę, że wśród wyciągniętych nie będzie żadnego z poniższych układów:

- 3 czerwone i 4 zielone
- 4 czerwone i 3 żółte
- trzy skarpety różnych kolorów.

Zadanie 33. Rozwiąż układ równań w liczbach rzeczywistych x i y :

$$\begin{cases} x^2 + x + \sqrt{x} = y^2 + y + \sqrt{y} \\ x^2 + xy + y^2 = 48 \end{cases}$$

W odpowiedzi podaj wartość sumy $x + y$.

¹Quenya to fikcyjny język stworzony przez J.R.R. Tolkiena, inspirowany łaciną, fińskim i greką, używany głównie przez elfów w Śródziemiu jako język ceremonialny i literacki. Charakteryzuje się bogatą gramatyką, rozbudowaną fleksją i melodyjnym brzmieniem, co czyni go jednym z najbardziej rozwiniętych języków w twórczości Tolkiena.

Zadanie 34. W okrąg o środku O wpisano trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle ADE$, przy czym $|AB| = |AC| = |DE| = |OA|$. Znaleźć stosunek $\frac{P_{ABC}}{P_{ADE}}$. Wynik zapisać w najprostszej postaci (zlikwidować niewymierność mianownika).

Zadanie 35. W obozie matematycznym 1 LO uczestniczy dokładnie 60 młodych olimpijczyków. Dziesięciu z nich ma na obozie dokładnie jednego kolegę z klasy. Dziewięciu ma dokładnie dwóch, a cztery osoby posiadają dokładnie trzech. Z ilu różnych klas są osoby na tym obozie?

Zadanie 36. Wyznaczyć liczbę rozwiązań równania

$$9a + 5b = 2025$$

w liczbach całkowitych $a, b \in \mathbb{Z}$.

Zadanie 37. Wiadomo, że $a + b = 1$ i $a^2 + b^2 = 2$. Ile wynosi $a^4 + b^4$?

Zadanie 38. Na haku, u sufitu, na wysokości 3 metrów, zaczepiona jest lina, której długość, po obu stronach haka, jest taka sama. 1 metr liny waży 300 gramów. Na jednym końcu liny zaczepiła się małpka, która trzyma w łapce banana, zaś na drugim końcu liny zaczepiono przeciwwagę równą wadze małpki. 1 centymetr banana waży 10 gramów. Długość całkowita liny, w metrach, stanowi $\frac{1}{3}$ wieku małpki, wyrażonego w latach, a waga małpki, w gramach, jest równa 200-krotnej liczbie lat matki tej małpki. Łączny wiek małpki i jej matki wynosi 30 lat. Dodając 2-krotność wagi małpki i 40-krotność wagi banana, otrzymuje się ten sam rezultat, jak przy dodaniu 10-krotnej wagi liny oraz wagi użytej przeciwwagi. Wiek małpki jest równy połowie wieku, który będzie miała jej matka, gdy ona będzie miała obecny wiek swojej matki. Oblicz długość banana i podaj ją w centymetrach.

Zadanie 39. Dane są liczby całkowite a i b takie, że:

$$\frac{\text{NWW}(a, b)}{\text{NWD}(a, b)} = 6.$$

Ile jest możliwych wartości ilorazu $\frac{a}{b}$?

Zadanie 40. Magda ma pudełko zapalek różnej długości i chce ułożyć z nich trójkąt o dodatnich kątach. Mateusz nie chce żeby jej się to udało, więc podmienił zawartość tego pudełka tak, że zadanie jest teraz niemożliwe do wykonania. Wiedząc, że pudełko ma wymiary $6 \text{ cm} \times 11 \text{ cm} \times 17 \text{ cm}$ i że Mateusz nie użył zapalek krótszych niż 1 cm, znajdź największą liczbę zapalek, które mogą znajdować się w pudełku po jego sabotażu.

Rozwiązania zadań

Zadanie 1. Oblicz i wynik podaj w cyfrach arabskich: $\text{MMMCDLIX} - \text{CMXC} + \text{XL} = ?$.

Odpowiedź: 2509

Autor zadania: Scarlett Lafa

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Scarlett Lafa

Rozwiązanie: $\text{MMMCDLIX} - \text{CMXC} + \text{XL}$ zapisane cyframi arabskimi to: $3459 - 990 + 40$ i jest to równe 2509.

Zadanie 2. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle ACB = 40^\circ$. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC , przy czym $\sphericalangle APB = 80^\circ$. Oblicz w stopniach wartość wyrażenia $\sphericalangle CAP + \sphericalangle CBP$.

Odpowiedź: 40°

Źródło zadania: VII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów - zawody stopnia pierwszego - część testowa, zmodyfikowane

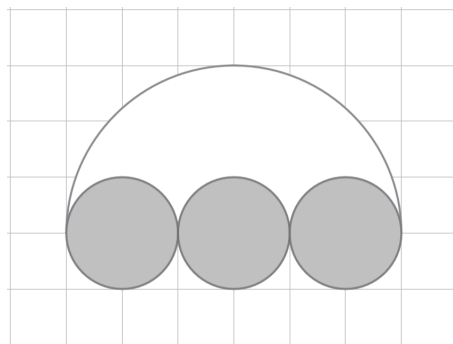
Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Tomasz Kossakowski

Rozwiązanie: Suma kątów w czworokącie wklęsłym $APBC$ jest równa 360° , więc

$$(360^\circ - \sphericalangle APB) + \sphericalangle CAP + \sphericalangle CBP + \sphericalangle ACB = 360^\circ,$$

zatem $\sphericalangle CAP + \sphericalangle CBP = \sphericalangle APB - \sphericalangle ACB = 80^\circ - 40^\circ = 40^\circ$.

Zadanie 3. W układzie współrzędnych dane są trzy okręgi i jeden półokrąg, jak na rysunku. Wyznacz stosunek pól części szarej do białej.



Odpowiedź: $1 = 1 : 1$

Źródło zadania: W. Bednarek, *Jeśli lubisz matematykę, cz. 2*

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Robert Rościzak

Rozwiązanie: Zauważmy, że pole szarego obszaru jest równe trzykrotności pola okręgu o promieniu r , więc jest równe $3 \cdot \pi \cdot r^2 = 3\pi r^2$. Pole białego obszaru jest równe połowie pola okręgu o promieniu $3r$ minus połowie pola szarego, więc jest równa $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (3r)^2 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \pi \cdot r^2 = 3\pi r^2$. Obszary mają takie same pole, więc stosunek ich pól wynosi 1.

Zadanie 4. W szufladzie Kasi leży 10 niesparowanych par skarpetek. Kasia wie, że każda para ma inny kolor. Ile skarpetek musi wyciągnąć (bez zwracania), aby mieć pewność, że wśród wyciągniętych znajdują się 2 tego samego koloru.

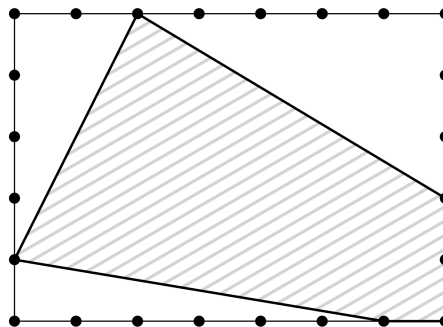
Odpowiedź: 11

Autor zadania: Grzegorz Rudnicki

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Grzegorz Rudnicki

Rozwiązanie: W najmniej optymalnym przypadku Kasia wyciągnie najpierw 10 skarpetek w różnych kolorach. Ponieważ jest tylko 10 kolorów, jedenasta skarpetka na pewno będzie miała taki sam kolor jak jedna z wcześniej wyciągniętych, zatem odpowiedź to 11.

Zadanie 5. Jarek, największa gwiazda wśród architektów, chce zbudować bardzo nowoczesną pięciokątną willę na prostokątnej posesji o wymiarach $35 \text{ m} \times 25 \text{ m}$. Powierzchnia działki przeznaczona na budowę jest zaznaczona na rysunku obok (kolejne kropki na brzegu wyznaczają odległości 5 m). Jaką część powierzchni posesji zajmuje pięciokąt, na planie którego zostanie zbudowana willa?



Odpowiedź: $\frac{41}{70}$

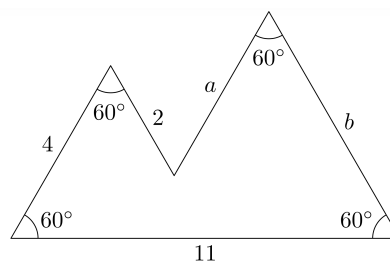
Źródło zadania: Náboj Matematyczny 2017

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Tomasz Kossakowski

Rozwiązanie: Ponieważ poszukujemy stosunku pól, więc możemy przyjąć 5 m jako jednostkę. Sumując pola trzech narożnych trójkątów prostokątnych, dostajemy wynik:

$$1 - \frac{1}{35} \left(\frac{5 \cdot 3}{2} + \frac{6 \cdot 1}{2} + \frac{4 \cdot 2}{2} \right) = \frac{41}{70}.$$

Zadanie 6. Na poniższym obrazku przedstawiono pięciokąt, w którym dane są niektóre miary kątów i długości boków. Wyznacz $a + b$.



Odpowiedź: 16

Źródło zadania: Náboj matematyczny 2024

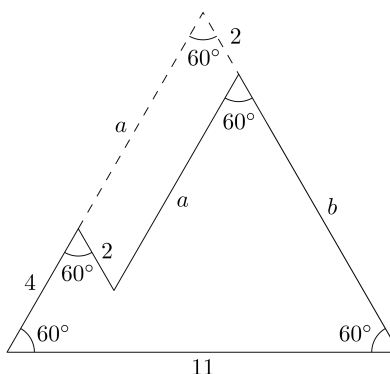
Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Maja Chlewicka

Rozwiązanie: Dopełnijmy pięciokąt do trójkąta równobocznego o boku długości

$$11 = 4 + a = 2 + b$$

jak na obrazku.

Dostajemy $a = 7$, $b = 9$ oraz $a + b = 16$.



Zadanie 7. Asia i Bartek zbierali kamyki na plaży. Asia zebrała o 49 kamyków więcej niż Bartek, więc postanowiła się z nim podzielić. Dała Bartkowi 11 swoich kamyków. O ile więcej kamyków ma teraz Asia niż Bartek?

Odpowiedź: 27

Źródło zadania: Náboj Junior 2023

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Antonina Pajek

Rozwiązanie: Gdy Asia przekazała Bartkowi jedenaście spośród swoich kamyków, straciła 11 kamyków, a Bartek zyskał ich 11. Zatem różnica pomiędzy liczbą kamyków, które posiadali, zmalała o $11 + 11 = 22$. Zatem na końcu Asia miała $49 - 22 = 27$ więcej kamyków niż Bartek.

Zadanie 8. Trzy siostry są w różnym wieku, a średnia ich wieku wynosi 10 lat. Każda z sióstr wyznaczyła poprawnie średnią wieku dwóch pozostałych sióstr, przy czym dwa z tych wyników wyniosły odpowiednio 11 i 12 lat. Ile lat ma najstarsza siostra?

Odpowiedź: 16

Źródło zadania: Kangur matematyczny 2022 Kadet

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Maja Chlewicka

Rozwiązanie: Oznaczamy wiek dziewczyn jako x, y, z .

$$\frac{x + y + z}{3} = 10$$
$$x + y + z = 30$$

$$\begin{aligned}\frac{x + y}{2} &= 11 \\ x + y &= 22 \\ z &= 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{x + z}{2} &= 12 \\ x + z &= 24 \\ y &= 6\end{aligned}$$

$$30 - 6 - 8 = 16$$

Zadanie 9. Do sklepu z drobiazgami przywieziono 200 ceramicznych skarbonek. Ustalono cenę sprzedaży 35 zł za sztukę. Po sprzedaniu 30% skarbonek zauważono, że część z nich ma ślady pęknięć. Uszkodzone skarboneki odłożono. Żeby uzyskać jednak zaplanowany przychód pozostałe sprzedano po 50 zł za sztukę. Ile było uszkodzonych skarbonek?

Odpowiedź: 42

Źródło zadania: Wojewódzki Konkurs Matematyczny dla uczniów szkół podstawowych województwa wielkopolskiego - stopień szkolny 2023/2024

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Maja Chlewicka

Rozwiązanie: $200 \cdot 35 = 7000$ zł – planowany przychód

$30\% \cdot 200 = 0,3 \cdot 200 = 60$ – tyle skarbonek sprzedano po 35 zł

$60 \cdot 35 = 2100$ zł – taki przychód uzyskano ze sprzedaży skarbonek po 35 zł

$7000 - 2100 = 4900$ zł – taki przychód należy uzyskać ze sprzedaży skarbonek po 50 zł

$4900 : 50 = 98$ – tyle skarbonek sprzedano po 50 zł

$200 - 60 - 98 = 42$ – ilość skarbonek na których występują ślady pęknięć.

Zadanie 10. Jeśli średnia arytmetyczna czterech różnych liczb całkowitych dodatnich wynosi 10, to jaka jest największa możliwa wartość jednej z tych liczb?

Odpowiedź: 34

Źródło zadania: Náboj matematyczny 2023

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Maja Chlewicka

Rozwiązanie: Żeby jedna z liczb była jak największa, to pozostałe liczby muszą być jak najmniejsze. Liczby są różne, więc najmniejsze możliwe trzy wartości to 1, 2 i 3. Średnia arytmetyczna wszystkich czterech liczb będzie równa 10, czyli ich suma będzie równa $4 \cdot 10 = 40$, gdy ostatnia liczba będzie wynosić $40 - (1 + 2 + 3) = 34$.

Zadanie 11. Uczniowie na lekcji przygotowują solanki o różnym stężeniu. Nauczyciel zapytał uczniów jak stężony musi być roztwór soli 1 o masie 2 kg, aby po dodaniu soli 2 o stężeniu 10% otrzymać sól 3 o stężeniu 15% i masie 7 kg. Odpowiedz na pytanie nauczyciela.

Odpowiedź: $27,5\% = 27.5\% = 27\frac{1}{2}\%$

Autor zadania: Antonina Pajek

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Antonina Pajek

Rozwiązanie: Niech x będzie naszym szukanym stężeniem. Układamy równanie i rozwiązujemy je:

$$\begin{aligned}2x + 10 \cdot (7 - 2) &= 15 \cdot 7 \\2x + 50 &= 105 \\2x &= 55 \\x &= 27.5\end{aligned}$$

Zadanie 12. Logarytmem liczby b przy podstawie a nazywamy taką liczbę x , że a podniesione do potęgi x daje liczbę b :

$$\log_a b = x \iff a^x = b.$$

Korzystając z informacji podanych powyżej, oblicz wartość wyrażenia

$$\left(\log_{\sqrt{3}} 9 + \log_2 512\right)^2.$$

Odpowiedź: 169

Autor zadania: Tomasz Kossakowski

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Tomasz Kossakowski

Rozwiązanie: Na początku obliczmy $\log_{\sqrt{3}} 9$. Do jakiej potęgi musimy podnieść liczbę $\sqrt{3}$, żeby otrzymać 9? Potęgując kolejno: $(\sqrt{3})^2 = 3$, $(\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}$ oraz $(\sqrt{3})^4 = 9$. Czyli $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$, bo musieliśmy podnieść liczbę $\sqrt{3}$ do potęgi 4, żeby dostać 9.

Analogicznie znajdujemy wartość $\log_2 512 = 9$, bowiem $2^9 = 512$.

W końcu otrzymujemy, że

$$\left(\log_{\sqrt{3}} 9 + \log_2 512\right)^2 = (4 + 9)^2 = 13^2 = 169.$$

Zadanie 13. Dany jest sześciokąt foremny $ABCDEF$. Odcinki AF i BC przedłużono tak, że się przecinają. Niech P będzie tym punktem przecięcia. Znaleźć stosunek:

$$\frac{|AP| + |BP|}{|DE|}.$$

Odpowiedź: 2

Autor zadania: Bartosz Trojanowski

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Bartosz Trojanowski

Rozwiązanie: Miara kąta wewnętrznego 6-kąta foremnego, to

$$\frac{(6 - 2) \cdot 180^\circ}{6} = 120^\circ.$$

Stąd $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBA = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ oraz $\sphericalangle APB = 180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ$, czyli trójkąt APB jest równoboczny. Stąd

$$\frac{|AP| + |BP|}{|DE|} = \frac{2|AB|}{|DE|} = 2.$$

Zadanie 14. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przypadkowo wybrany dzielnik naturalny liczby 20 jest mniejszy niż 5?

Odpowiedź: $\frac{1}{2} = 0.5 = 0,5$

Źródło zadania: *Konkursy matematyczne dla gimnazjum* Barbara Kot, Jadwiga Sterczewska, Zofia Narojczyk, Wydawnictwo "Aksjomat Toruń" 2012

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Antonina Pajek

Rozwiązanie: Wypiszmy wszystkie dzielniki naturalne liczby 20, oto one: $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

Pogrubieniem zaznaczymy te, które są mniejsze od 5: $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

Czyli z pośród 6 dzielników zaznaczyliśmy 3, czyli nasze prawdopodobieństwo to $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Zadanie 15. Szóstka przyjaciół bawi się w detektywów i szpiegów. Jeden z nich został wybrany na detektywa i na chwilę wyszedł z pokoju. Pozostała piątka wybiera spośród siebie dwóch szpiegów. Szpiegdy zawsze kłamią, a wszyscy pozostali zawsze mówią prawdę. Detektyw wraca do pokoju i próbuje ustalić, kto jest szpiegiem. Piątka przyjaciół odpowiedziała mu w następujący sposób (liczba w nawiasie odpowiada numerowi gracza).

Ala (1): „Dominik to szpieg.”

Bartek (2): „Celina nie jest szpiegiem.”

Celina (4): „Bartek na pewno nie jest szpiegiem.”

Dominik (8): „Edek nie jest szpiegiem.”

Edek (16): „Bartek jest szpiegiem.”

Jaka jest suma numerów szpiegów?

Odpowiedź: 24

Źródło zadania: Nábój Junior 2022

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Tomasz Kossakowski

Rozwiązanie: Pomyślmy, co wynika z tego, gdy ktoś powie, że ktoś inny (nie) jest szpiegiem. Przykładowo, Ala twierdzi, że Dominik jest szpiegiem. Jeśli Ala mówi prawdę (czyli nie jest szpiegiem), Dominik jest szpiegiem. Jeśli Ala kłamie (czyli jest szpiegiem), Dominik nie jest szpiegiem. Oznacza to, że Ala i Dominik mają różne role – jedno z nich jest szpiegiem, a drugie nie. Teraz popatrzmy na stwierdzenie Bartka. Jeśli mówi prawdę (czyli nie jest szpiegiem) to Celina również nie jest szpiegiem. Jeśli jednak Bartek kłamie (czyli jest szpiegiem) to Celina też jest szpiegiem. Stąd Bartek i Celina muszą być po tej samej stronie – albo obydwoje są szpiegami, albo żadne z nich nie jest. Ponadto Dominik i Edek również mają tę samą rolę. Jeśli Ala byłaby szpiegiem, to jedna z par – Bartek i Celina lub Dominik i Edek także musiałyby być parą szpiegów. Wtedy mielibyśmy co najmniej troje szpiegów, co jest niemożliwe. Stąd Ala nie może być szpiegiem, a skoro twierdzi ona, że Dominik jest szpiegiem, to musi on nim być. Wiemy, że Dominik jest po stronie Edka, więc Edek również musi być szpiegiem.

Szpiegami są zatem Dominik i Edek, a suma ich numerów wynosi $8 + 16 = 24$.

Zadanie 16. Pięć przyjaciółek chce podzielić między siebie pięć deserów (każdego jest dokładnie jedna sztuka i każda dziewczyna ma zjeść dokładnie jeden deser w całości): *lody truskawkowe*, *lody czekoladowe*, *ciasto waniliowe*, *ciasto czekoladowe*, *truskawki*. Ala nie lubi truskawek. Dominika jest fanką ciast, ale ma uczulenie na czekoladę, a Celina kocha świeże owoce. Basia ma ochotę na coś truskawkowego. Ela woli ciasto od lodów. Co ma zjeść Ala, żeby wszystkie koleżanki były zadowolone?

Odpowiedź: *lody czekoladowe*

Autor zadania: Maria Janyska

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Maria Janyska

Rozwiązanie:

	Ala	Basia	Celina	Dominika	Ela
lody czekoladowe	T	N	N	N	N
lody truskawkowe	N	T	N	N	N
ciasto czekoladowe	N	N	N	N	T
ciasto waniliowe	N	N	N	T	N
truskawki	N	N	T	N	N

Tabela 1: Litera T oznaczają przekąskę, którą powinna zjeść dana dziewczyna

Po kolei wpisujemy:

- Wpisujemy N w kolumnie Ali w rzędzie drugim i piątym, bo nie lubi truskawek.
- Jedyne nieczekoladowe ciasto to waniliowe, więc Dominika dostaje wiersz czwarty. W pozostałych komórkach wiersza z *ciastem waniliowym* wpisujemy N.
- Jedyne świeże owoce to *truskawki*, więc Celinie przyporządkowujemy wiersz piąty. Uzupełniamy pozostałe komórki dla *truskawek* i Celiny.
- Jedyne pozostała truskawkowa przekąska to lody, więc Basia dostaje T w wierszu drugim. Uzupełniamy pozostałe komórki dla *lodów truskawkowych* i Basi.
- Jedyne pozostałe ciasto to czekoladowe, więc Ela dostaje wiersz trzeci.
- Pozostaje jedynie wiersz pierwszy, więc Ala dostaje *lody czekoladowe*.

Zadanie 17. Dany jest trójkąt, którego dwa kąty są równe 30° i 105° . Bok naprzeciw kąta 30° ma długość $2\sqrt{2}$. Znajdź długość boku naprzeciw kąta 105° .

Odpowiedź: $2 + 2\sqrt{3} = 2(1 + \sqrt{3})$

Źródło zadania: *MATeMATyka 2, zakres podstawowy i rozszerzony*, Dorota Ponczek, Grzegorz Janocha, Joanna Czarnowska, Jolanta Wesołowska, Lech Chańko, Wojciech Babiański, wyd. Nowa Era 2024

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Robert Rośczał

Rozwiązanie: Nazwijmy trójkąt ABC . Niech kąt przy wierzchołku A jest równy 30° , a przy C jest równy 105° . Niech punkt D będzie spodkiem wysokości poprowadzonej z punktu C na bok AB . Wtedy, trójkąt BCD jest prostokątny i równoramienny, więc na mocy Twierdzenia Pitagorasa $2|BD|^2 = |BC|^2 = 8$, czyli $|BD| = 2$. Następnie zauważmy, że ACD jest trójkątem charakterystycznym, który jest połową trójkąta równobocznego. Wynika z tego, że $|AC| = 2|CE|$. Finalnie ponownie używamy Twierdzenia Pitagorasa: $|AE|^2 = |CA|^2 - |CE|^2$, czyli $|AE| = 2\sqrt{3}$. Ostateczny wynik to $|AE| + |BE| = 2 + 2\sqrt{3}$.

Zadanie 18. Patryk tworzy plan nauki na najbliższych pięć godzin. Chce poświęcić trzy jednogodzinne bloki nauki matematyce i dwa jednogodzinne bloki nauki fizyce. Na ile sposobów Patryk może zaplanować te pięć godzin?

Odpowiedź: 10

Źródło zadania: Nábój Junior IX edycja

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Scarlett Lafa

Rozwiązanie: Wypiszmy wszystkie przypadki. Jeśli Patryk rozpocznie naukę od matematyki, to możliwe są następujące układy: MMMFF, MMFMF, MMFFM, MFMMF, MFMMF, MFFMM. Jeśli zaś zacznie od fizyki, to mamy następujące ewentualności: FMMMM, FMMFM, FMFMM, FFMMM. Łącznie istnieje zatem 10 różnych harmonogramów.

Zadanie 19. Beczka z wodą waży 120 kg. Gdy odlejemy 75% wody, to waga beczki z wodą będzie wynosić x kg. Ile waży woda, a ile beczka? Jakie warunki musi spełniać liczba x , by zadanie miało rozwiązanie? Odpowiedź podaj w formie $a < x < b$.

Odpowiedź: $30 < x < 120$

Źródło zadania: *Konkursy matematyczne dla gimnazjum* Barbara Kot, Jadwiga Sterczewska, Zofia Narojczyk, Wydawnictwo "Aksjomat Toruń" 2012

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Antonina Pajek

Rozwiązanie: Niech b oznacza masę beczki, a w masę wody. Układamy równania:

$$b + w = 120$$

$$b + 0,25w = a.$$

Z pierwszego równania wyznaczamy w :

$$w = 120 - b$$

i wstawiamy do równania 2, otrzymując:

$$b + 30 - 0,25b = a$$

$$0,75b + 30 = a$$

$$0,75b = a - 30$$

$$b = \frac{4}{3}a - 40.$$

Analogicznie postępujemy wyznaczając b i wstawiając do równania 2 w wyniku czego otrzymujemy:

$$w = 160 - \frac{4}{3}a$$

Teraz wyznaczam przedział dla x , x musi być mniejsze niż 120 i zarazem większe od 30 (beczka nie może ważyć nic), zatem

$$30 < x < 120.$$

Zadanie 20. Maja ma o 3 lata więcej niż Tosia. Lena za to 5 lat temu miała 2 razy mniej lat mniej niż Hania będzie miała za 3 lata. 2 lata temu cztery dziewczyny miały w sumie 37 lat, a Hania za rok będzie miała tyle lat, ile Tosia rok temu. Ile lat będą miały w sumie Lena i Hania za 2 lata?

Odpowiedź: 24

Autor zadania: Maria Janyska

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Maria Janyska

Rozwiązanie: Oznaczmy wiek dziewczyn Mai, Tosi, Leny i Hani w dniu dzisiejszym odpowiednio jako m, t, l, h . Zapiszmy układ równań, który otrzymujemy z warunków zadania:

$$\begin{cases} m = t + 3 \\ 2(l - 5) = h + 3 \\ m - 2 + t - 2 + l - 2 + h - 2 = 37 \\ h + 1 = t - 1 \end{cases}$$

Wyznamy wiek wszystkich dziewczyn w zależności od zmiennej t .

$$\begin{cases} m = t + 3 \\ h = t - 2 \\ l = \frac{t+11}{2} \end{cases}$$

Podstawmy do równania $m + t + l + h = 45$ wyznaczone wartości. Otrzymujemy $t + 3 + t + \frac{t+11}{2} + t - 2 = 45$ i ostatecznie dostajemy wartości $t = 11, l = 11, h = 9$, a więc suma wieku Leny i Hani za 2 lata wyniesie $11 + 2 + 9 + 2 = 24$.

Zadanie 21. Przez $n!$ oznaczamy liczbę $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Wyznaczyć najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą n o następującej własności: ostatnie trzy cyfry w zapisie dziesiętnym liczby $n!$ to 0.

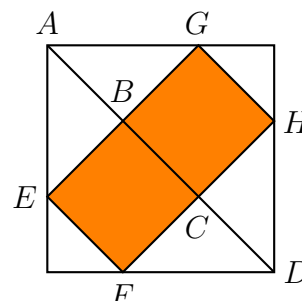
Odpowiedź: 15

Autor zadania: Bartosz Trojanowski

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Bartosz Trojanowski

Rozwiązanie: Zauważmy, że skoro trzy ostatnie cyfry liczby $n!$ mają być równe 0, to liczba $n!$ musi być podzielna przez $10^3 = 2^3 \cdot 5^3$. Aby $n!$ była podzielna przez 5^3 , to n musi być takie, że co najmniej trzy liczby całkowite dodatnie mniejsze lub równe n są podzielne przez 5. Najmniejszą taką liczbą jest 15. Oczywiście 15! dzieli się też przez 2^3 , więc szukana liczba to 15.

Zadanie 22. Na rysunku obok widnieją 3 kwadraty. Wyznaczyć pole pomarańczowego obszaru wiedząc, że długość boku największego kwadratu wynosi 3.



Odpowiedź: 4

Autor zadania: Bartosz Trojanowski

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Bartosz Trojanowski

Rozwiązanie: Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Zauważmy, że odcinki BF i CE są równoległe do przekątnej dużego kwadratu, więc kąty $\angle DFC$, $\angle FDC$, $\angle BEA$, $\angle BAE$ mają po 45° . Stąd trójkąty CDF i ABE są równoramienne, czyli $|CD| = |FC| = |BC|$ oraz $|AB| = |BE| = |BC|$. Czyli $|BC| = \frac{AD}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$. Stąd pola kwadratów $BCFE$ i $BCHG$ to $(\sqrt{2})^2 = 2$, zatem ich suma to 4.

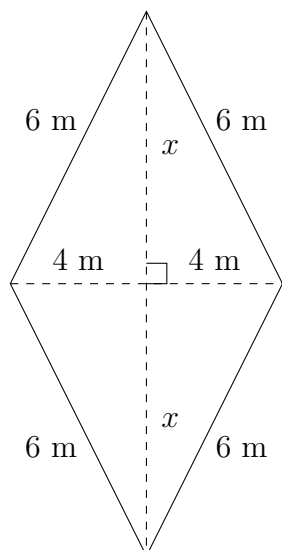
Zadanie 23. Romb zbudowany jest z 2 trójkątów równoramiennych o bokach 6 m, 60 dm, 800 cm. Oblicz pole tego rombu. Wynik podaj w metrach kwadratowych.

Odpowiedź: $16\sqrt{5}$

Źródło zadania: Wojewódzki Konkurs Matematyczny dla szkół podstawowych w roku szkolnym 2018/2019, etap szkolny, woj. warmińsko-mazurskie

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Scarlett Lafa

Rozwiązanie:



Zauważmy, że $60 \text{ dm} = 6 \text{ m}$ oraz $800 \text{ cm} = 8 \text{ m}$. Niech druga przekątna ma długość $2x$.

Pamiętając o tym, że przekątne w rombie połowią się pod kątem prostym, stosujemy twierdzenie Pitagorasa, by obliczyć długość x :

$$x^2 + 4^2 = 6^2 \implies x = \sqrt{36 - 16} = 2\sqrt{5}.$$

Pole tego rombu wynosi zatem:

$$P = \frac{8 \cdot 4\sqrt{5}}{2} = 16\sqrt{5} \text{ m}^2.$$

Zadanie 24. Kran A napełnia wannę w 15 min, natomiast kran B w 20 min. Niestety korek w wannie jest nieszczelny i w ciągu 60 min cała woda wypływa z wanny. Po ilu minutach napełniona będzie cała wanna, jeżeli na początku odkręcimy jednocześnie oba krany?

Odpowiedź: 10 min

Autor zadania: Grzegorz Rudnicki

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Grzegorz Rudnicki

Rozwiązanie: W ciągu godziny kran A napełni 4 wanny, kran B 3 wanny, a przez korek wypłynie jedna wanna. Łącznie mamy $4 + 3 - 1 = 6$ wanien. W takim razie jedna wanna pełna będzie po $\frac{1}{6} \cdot 1$ h, czyli po 10 min.

Zadanie 25. Oskar napisał sumę kwadratów dwóch liczb, jak na rysunku. Niestety, niektóre cyfry są niewidoczne z powodu zalania atramentem. Jaka jest ostatnia cyfra pierwszej liczby?

$$(2\text{?})^2 + (1\text{?}2)^2 = 7133029$$

Odpowiedź: 5

Źródło zadania: Międzynarodowy Konkurs Matematyczny *Kangur* 2022 - kat. Kadet

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Scarlett Lafa

Rozwiązanie: Zauważmy, że cyfra jedności drugiej liczby będzie równa 4, a 7133029 ma cyfrę jedności 9. $9 - 4 = 5$, więc cyfra jedności pierwszej liczby będzie musiała wynosić 5.

Zadanie 26. Podaj czwórkę liczb (x, y, z, t) spełniające układ równań:

$$\begin{cases} x + y + z = 14 \\ x + y + t = 10 \\ y + z + t = 15 \\ x + z + t = 12 \end{cases}$$

Odpowiedź: $(2, 5, 7, 3)$

Źródło zadania: Z. Bobiński, P. Nodzyński, M. Uski; *Koło Matematyczne w Gimnazjum*, wyd. "Aksjomat" 2010

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Grzegorz Rudnicki

Rozwiązanie: Dodając równania stronami otrzymujemy $3x + 3y + 3z + 3t = 51$, czyli $x + y + z + t = 17$. Mamy więc

$$\begin{cases} 17 - t = 14 \\ 17 - z = 10 \\ 17 - x = 15 \\ 17 - y = 12 \end{cases}$$

Zatem, $(x, y, z, t) = (2, 5, 7, 3)$.

Zadanie 27. Przedstawione zostały pewne liczby w języku Quenya²:

<i>neldë</i>	3	<i>enquë yucainen</i>	26
<i>canta</i>	4	<i>minë nelcainen</i>	31
<i>lempë</i>	5	<i>cancainen</i>	40
<i>otso</i>	7	<i>atta tolcainen</i>	82
<i>tolto</i>	8	<i>atta tolcainen tuxa</i>	182
<i>nelcëa</i>	13	<i>nertë nelcainen lemtuxa</i>	539
<i>encëa</i>	16		

Jak słownie w języku Quenya zapiszemy wynik poniższego działania?

$$tolcëa + enquë cancainen$$

Odpowiedź: *canta encainen*

Źródło zadania: Rumuńska Olimpiada Lingwistyczna z roku 2013

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Tomasz Kossakowski

Rozwiązanie:

Zauważamy, że liczby 13 i 16 kończą się sufiksem *-cëa*, podczas gdy liczby większe niż 26 mają inną strukturę. Porównując słowa oznaczające 3 i 13, możemy więc przypuszczać, że jest to język oparty na systemie dziesiętnym, a liczby w formacie $10 + X$ zapisywane są jako *X-cëa*. Zauważamy również, że aby utworzyć liczbę 13, użyto jedynie części słowa oznaczającego 3 (*nel*).

Porównując przykłady 82 i 182, zauważamy, że różnią się one tylko słowem *tuxa* umieszczonym na końcu; możemy więc wywnioskować, że *tuxa* oznacza 100 (co dodatkowo potwierdza, że system liczbowy tego języka oparty jest na systemie dziesiętnym). Ponadto, patrząc na liczbę 539, zauważamy, że ostatnim słowem jest *lemtuxa*, gdzie *tuxa* = 100, a *lem* to początek słowa oznaczającego 5. Tak więc i w tym przypadku użyta została jedynie część tematu jednostki. Dodatkowo zauważamy, że w prawej kolumnie drugie słowo zawsze kończy się na *-cainen*. Możemy przypuszczać, że jest to sufiks oznaczający dziesiątki ($10X$), z czego wnioskujemy, że szyk liczby w Quenyi to:

jednostki – dziesiątki – setki.

Tylko na podstawie tych obserwacji możemy sformułować następujące zasady:

$$10 + X = X' - cëa \quad 100X + 10Y + Z = Z Y' - cainen X' - tuxa.$$

Przez X' i Y' rozumiemy to, że użyta została inna, skrócona forma danego słowa.

Na podstawie tych obserwacji, możemy stworzyć tabelę z formą każdej cyfry w różnych kontekstach:

Cyfra	X	$10 + X$	$10X$	$100X$
1	<i>minë</i>			$\emptyset$
2	<i>atta</i>		<i>yu-</i>	
3	<i>neldë</i>	<i>nel-</i>	<i>nel-</i>	
4	<i>canta</i>		<i>can-</i>	
5	<i>lempë</i>			<i>lem-</i>
6	<i>enquë</i>	<i>en-</i>		
7	<i>otso</i>			
8	<i>tolto</i>		<i>tol-</i>	
9	<i>nertë</i>			

²Quenya to fikcyjny język stworzony przez J.R.R. Tolkiena, inspirowany łaciną, fińskim i greką, używany głównie przez elfów w Śródziemiu jako język ceremonialny i literacki. Charakteryzuje się bogatą gramatyką, rozbudowaną fleksją i melodyjnym brzmieniem, co czyni go jednym z najbardziej rozwiniętych języków w twórczości Tolkiena.

Cztery kolumny przedstawiają formę, w jakiej dana cyfra jest używana, jeśli reprezentuje jednostki, jeśli występuje z sufiksem *-cëä* (co oznacza $10 + X$), jeśli występuje z sufiksem *-cainen* ($10X$) lub jeśli występuje z sufiksem *-tuxa* ($100X$).

Zauważamy, że ta sama forma liczby 3 pojawia się zarówno w przypadku $10 + X$, jak i $10X$. W związku z tym wnioskujemy, że oba konteksty używają tej samej formy. Ponadto, nie mamy powodu, by nie zakładać, że ta sama forma będzie również używana w przypadku setek. Aby wywnioskować, jak ta forma jest tworzona, porównujemy ją z pełną formą w pierwszej kolumnie (jednostki). Zauważamy, że skrócona forma (oznaczona jako X' i Y') reprezentuje pierwszą sylabę jednostki. Jedynym wyjątkiem jest cyfra 2, gdzie forma używana dla 20 to *yu-*. Wydaje się, że w Quenyi 1 i 2 są nieregularne i mają różne formy w różnych kontekstach. Nie jest to nic niezwykłego w językach naturalnych.

W ten sposób możemy rozwiązać zadanie i zapisać zasady.

Zasady: Cyfry są pojedynczymi słowami. W słowach złożonych używa się tylko tematu cyfry, który jest reprezentowany przez pierwszą sylabę (w notacji poniżej, X' to temat/pierwsza sylaba liczby X). Cyfra 2 ma specjalną formę, *yu-*. Tak więc:

$$10 + X = X' - cëä \qquad 100X + 10Y + Z = Z Y' - cainen \quad X' - tuxa$$

W zadaniu mieliśmy policzyć

$$tolcëä + enquë cancainen.$$

Zgodnie z tabelą i zasadami:

$$tolcëä = 8 + 10 = 18 \qquad enquë cancainen = 6 + 4 \cdot 10 = 46$$

$$tolcëä + enquë cancainen = 18 + 46 = 64$$

Liczba 64 to $4 + 6 \cdot 10 = canta encainen$.

Zadanie 28. Kwadrat podzielono na dwa prostokąty, w których stosunek obwodów wynosi $7 : 5$. Ile jest równy stosunek pól tych prostokątów?

Odpowiedź: $3 = 3 : 1$

Źródło zadania: Konkurs z matematyki dla uczniów szkół podstawowych - etap wojewódzki - województwo podkarpackie - rok szkolny 2021/2022

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Maja Chlewicka

Rozwiązanie: Oznaczamy bok kwadratu jako x a krótszy bok jednego z prostokątów jako y .

Obwód 1 prostokąta $= 2x + 2y$.

Obwód 2 prostokąta $= 2x + 2(x - y)$.

Stosunek O_1 do O_2 to $\frac{2x+2y}{2x+2(x-y)} = \frac{7}{5}$.

$$5(2x + 2y) = 7(2x + 2x - 2y)$$

$$10x + 10y = 28x - 14y$$

$$24y = 18x$$

$$y = \frac{3}{4}x$$

$$\text{Stosunek } P_1 \text{ do } P_2 = \frac{xy}{x(x-y)} = \frac{y}{x-y} = \frac{\frac{3}{4}x}{x-\frac{3}{4}x} = \frac{3}{4}x \cdot 4x = 3.$$

Zadanie 29. Dany jest 18-kąt foremny. Jaka jest suma miar trzech sąsiadujących kątów wewnętrznych w tej figurze?

Odpowiedź: 480°

Źródło zadania: Maria Janyska

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Maria Janyska

Rozwiązanie: Dla wielokątów (o nieprzecinających się bokach) możemy obliczyć sumę miar kątów wewnętrznych ze wzoru $(n - 2) \cdot 180^\circ$, gdzie n oznacza liczbę boków danego wielokąta. Skoro nasz wielokąt jest foremny, to każdy kąt wewnętrzny ma taką samą miarę. Sumę trzech z nich możemy zatem obliczyć, używając wzoru $\frac{3 \cdot (18 - 2) \cdot 180^\circ}{18} = 3 \cdot 16 \cdot 10^\circ = 480^\circ$.

Zadanie 30. Znajdź najmniejszą taką liczbę naturalną n , że:

- $n + 1$ jest podzielne przez 6.
- $n - 2$ jest podzielne przez 11.
- n jest podzielne przez dokładnie jedną z liczb 5, 7.

Odpowiedź: 365

Autor zadania: Robert Rościzak

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Robert Rościzak

Rozwiązanie: Najprostszym sposobem jest sprawdzenie wszystkich wielokrotności 5 i 7 w poszukiwaniu liczb które spełniają warunki 1 i 2. Niestety rozwiązanie może zostać wtedy znalezione dopiero po około 100 liczbach. Prościej, można znaleźć liczby, które spełniają pierwsze dwa warunki: Można to wykonać sprawdzając liczby dające resztę 2 z dzielenia przez 11 lub zastosować algorytm na CRT: Znajdźmy najpierw wielokrotność 6, która pomniejszona o 2 jest podzielna przez 11. Już 24 spełnia ten warunek. Następnie odwrotnie: liczbę podzielną przez 11, która powiększona o 1 jest podzielna przez 6: daje to nawet 11. Wystarczy dodać te liczby, aby spełnić obydwa warunki z zadania: $24 + 11 = 35$. Ponieważ pierwsza jest podzielna przez 6, a druga daje resztę z dzielenia przez 6 równą 5, to ich suma także daje resztę 5. Analogicznie działa warunek z 11. Ponadto, warunek będzie wciąż spełniony, jeżeli dodamy liczbę, która jest jednocześnie wielokrotnością 11 i 6, więc liczby spełniające oba warunki tworzą ciąg arytmetyczny:

$$n = 66k + 35$$

dla pewnej liczby całkowitej k . Warunek trzeci nie jest spełniony dla $k = 0$, ale dla $k = 5$ już tak. Można sprawdzić wszystkie przypadki pomiędzy lub zauważyć, że aby liczba $66k + 35$ była podzielna przez 5 lub 7, to $66k$ musi spełniać ten warunek, a ponieważ 66 jest względnie pierwsze z 5 i 7 to musi go spełniać k , co prowadzi do wniosku $k = 5$, czyli $n = 66 \cdot 5 + 35 = 365$.

Zadanie 31. Dwóch ludzi jedzie rowerami jeden ku drugiemu. Dzieli ich 20 km. W momencie, gdy wyjeżdżają, mucha siedząca na kierownicy jednego zaczyna lot w stronę drugiego. Dolatuje do drugiej kierownicy i wraca na pierwszą. Mucha lata tam i z powrotem tak długo, aż rowery się spotkają. Jeżeli każdy rower jechał ze stałą prędkością $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a mucha latała również ze stałą prędkością $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, to ile kilometrów w sumie pokonała mucha?

Odpowiedź: 15

Źródło zadania: *Zabójcza zagadka matematyka* Jordi Sierra i Fabra

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Michał Fronczek

Rozwiązanie: Skoro każdy rowerzysta jechał z prędkością $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, to razem pokonywali oni 20 km w ciągu jednej godziny. W takim razie do spotkania dojdzie równo po godzinie od startu. Skoro mucha lata stale z prędkością $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, to niezależnie od kierunku lotu (!) przebędzie drogę równą $s = v \cdot t = 15 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1 = 15 \text{ km}$.

Zadanie 32. Bartek ma w swojej szufladzie skarpety w czterech kolorach: 8 czerwonych, 6 żółtych, 5 zielonych i 4 niebieskie. Ile najwięcej skarpet może wyciągnąć by mieć szansę, że wśród wyciągniętych nie będzie żadnego z poniższych układów:

- (a) 3 czerwone i 4 zielone
- (b) 4 czerwone i 3 żółte
- (c) trzy skarpety różnych kolorów.

Odpowiedź: 12

Autor zadania: Michał Fronczek

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Michał Fronczek

Rozwiązanie: Z (c) wynika, że Bartek może wyciągać skarpety maksymalnie dwóch kolorów. Rozpatrzmy wszystkie takie możliwości i znajdziemy tą, która dopuszcza najwięcej skarpet przed przymusowym wystąpieniem układu:

(1) Tylko czerwone i żółte.

Zgodnie z punktem (b) Bartek, by nie przekroczyć zadanego limitu może wybrać albo wszystkie skarpety czerwone i dwie żółte, albo trzy czerwone i wszystkie żółte. Pierwsza opcja daje łącznie możliwość bezpiecznego wyciągnięcia dziesięciu skarpet ($8 + 2$), a druga dziewięciu ($3 + 6$).

Maksymalnie 10 skarpet.

(2) Tylko czerwone i zielone.

Zgodnie z punktem (a) możemy, podobnie jak w (1) wybrać albo wszystkie czerwone i trzy zielone, co daje $8 + 3 = 11$ skarpet, albo dwie czerwone i wszystkie zielone, czyli $2 + 5 = 7$ skarpet. Maksymalnie 11 skarpet.

(3) Tylko czerwone i niebieskie.

Tutaj nie ma żadnych obostrzeń, więc możemy wyciągnąć wszystkie skarpety obu kolorów, to jest $8 + 4 = 12$.

Maksymalnie 12 skarpet.

(4) Tylko żółte i zielone.

Tu podobnie jak w 3. nie ma granic, więc bierzemy wszystkie skarpety obu kolorów, czyli $6 + 5 = 11$.

Maksymalnie 11 skarpet.

(5) Tylko żółte i niebieskie.

Analogicznie do 3. bierzemy wszystkie skarpety, których jest $6 + 4 = 10$.

Maksymalnie 10 skarpet.

(6) Tylko zielone i niebieskie.

Podobnie jak w 3. możemy wziąć wszystkie skarpety, a ich jest $5 + 4 = 9$.

Maksymalnie 9 skarpet.

Tak więc najwięcej skarpet, ile możemy wziąć bez wywoływania któregoś z układów to 12 (patrz punkt (3)).

Zadanie 33. Rozwiąż układ równań w liczbach rzeczywistych x i y :

$$\begin{cases} x^2 + x + \sqrt{x} = y^2 + y + \sqrt{y} \\ x^2 + xy + y^2 = 48 \end{cases}$$

W odpowiedzi podaj wartość sumy $x + y$.

Odpowiedź: 8

Źródło zadania: XXI Śląski Konkurs Matematyczny, zawody rejonowe; zadanie lekko zmodyfikowane

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Michał Fronczek

Rozwiązanie: Na początku zauważmy, że aby pierwsze równanie mogło być spełnione, x i y muszą być nieujemne, bowiem w przeciwnym razie zadane pierwiastki byłyby niezdefiniowane. Zauważmy teraz, że jeśli $x > y$ to również $x^2 > y^2$ i $\sqrt{x} > \sqrt{y}$, tak więc lewa strona pierwszego równania będzie większa od drugiej. Analogiczna sytuacja będzie miała miejsce, gdy $x < y$. W takim razie $x = y$.

Podstawmy to do drugiego równania:

$$x^2 + xy + y^2 = 48$$

$$x^2 + x \cdot x + x^2 = 48$$

$$3x^2 = 48$$

$$x^2 = 16$$

Pozostaje zauważyć, że x jest dodatni, a więc $x = 4$. Po uwzględnieniu wcześniejszej obserwacji dostajemy zatem $x = y = 4$.

Ostatecznie $x + y = 4 + 4 = 8$.

Zadanie 34. W okrąg o środku O wpisano trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle ADE$, przy czym $|AB| = |AC| = |DE| = |OA|$. Znaleźć stosunek $\frac{P_{ABC}}{P_{ADE}}$. Wynik zapisać w najprostszej postaci (zlikwidować niewymierność mianownika).

Odpowiedź: $2\sqrt{3} - 3$

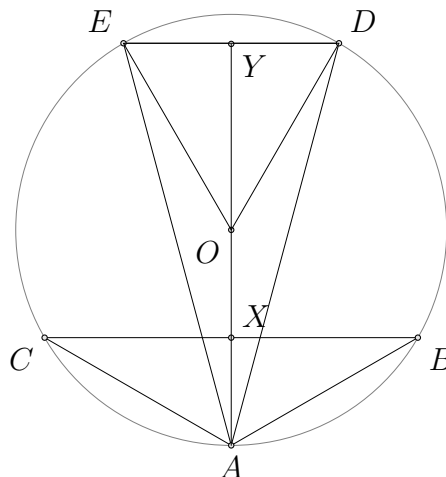
Autor zadania: Grzegorz Rudnicki

Wybór zadania i redakcja rozwiązania:

Grzegorz Rudnicki

Rozwiązanie: Niech AX będzie wysokością $\triangle ABC$, a AY wysokością $\triangle ADE$. Oznaczmy $|OA|$ jako r . Trójkąt $\triangle ODE$ jest równoboczny, zatem $|OY| = \frac{r\sqrt{3}}{2}$, czyli $|AY| = |AO| + |OY| = r + \frac{r\sqrt{3}}{2}$. Otrzymujemy $P_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \left(r + \frac{r\sqrt{3}}{2}\right)$. Zauważmy, że trójkąty $\triangle AXC$ i $\triangle ABX$ są połówkami trójkąta równobocznego o boku równym r . Mamy więc $P_{ABC} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$. Obliczamy wartość szukanego ilorazu:

$$\frac{P_{ABC}}{P_{ADE}} = \frac{\frac{r^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2} \cdot r \cdot \left(r + \frac{r\sqrt{3}}{2}\right)} = 2\sqrt{3} - 3.$$



Zadanie 35. W obozie matematycznym 1 LO uczestniczy dokładnie 60 młodych olimpijczyków. Dziesięciu z nich ma na obozie dokładnie jednego kolegę z klasy. Dziewięciu ma dokładnie dwóch, a cztery osoby posiadają dokładnie trzech. Z ilu różnych klas są osoby na tym obozie?

Odpowiedź: 46

Źródło zadania: Miniatury Matematyczne 44 *Matematyczne Zabawy*

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Robert Rościzak

Rozwiązanie: Jeżeli pewien olimpijczyk ma n przyjaciół z klasy, to z tej klasy uczestniczy dokładnie $n + 1$ uczniów, i każdy ma dokładnie n przyjaciół. Możemy więc wydedukować liczbę klas wśród każdej grupy:

- Dla $n = 3$ mamy 4 osoby, więc $\frac{4}{3+1} = 1$ klasę.
- Dla $n = 2$ mamy 9 osób, więc $\frac{9}{2+1} = 3$ różne klasy.
- Dla $n = 1$ mamy 10 osób, więc $\frac{10}{1+1} = 5$ różnych klas.
- Dla $n = 0$ mamy $60 - 10 - 9 - 4 = 37$ osób, więc $\frac{37}{0+1} = 37$ różnych klas.

Sumując te wartości otrzymujemy $1 + 3 + 5 + 37 = 46$ różnych klas.

Zadanie 36. Wyznaczyć liczbę rozwiązań równania

$$9a + 5b = 2025$$

w liczbach całkowitych $a, b \in \mathbb{Z}$.

Odpowiedź: $\infty =$ nieskończenie wiele

Autor zadania: Bartosz Trojanowski

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Bartosz Trojanowski

Rozwiązanie: Zauważmy, że 2025 jest podzielne zarówno przez 5, jak i przez 9. Stąd $5 \mid a$ oraz $9 \mid b$. Podstawmy więc $a = 5a_1$, $b = 9b_1$. Wstawiając te liczby do wyjściowego równania i dzieląc przez 45 mamy

$$a_1 + b_1 = 45.$$

Takich par (a_1, b_1) jest oczywiście nieskończenie wiele, więc par (a, b) również.

Zadanie 37. Wiadomo, że $a + b = 1$ i $a^2 + b^2 = 2$. Ile wynosi $a^4 + b^4$?

Odpowiedź: $3.5 = 3, 5 = 3\frac{1}{2}$

Źródło zadania: Kangur Matematyczny '91 - kategoria Junior

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Grzegorz Rudnicki

Rozwiązanie: Z treści zadania wynika, że $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 1$. Podstawiając $a^2 + b^2 = 2$ do powyższego równania otrzymujemy $ab = -\frac{1}{2}$. Zauważmy, że $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$. Wartość szukanego wyrażenia wyniesie więc $2^2 - (-\frac{1}{2})^2 = 3, 5$.

Zadanie 38. Na haku, u sufitu, na wysokości 3 metrów, zaczepiona jest lina, której długość, po obu stronach haka, jest taka sama. 1 metr liny waży 300 gramów. Na jednym końcu liny zaczepiła się małpka, która trzyma w łapce banana, zaś na drugim końcu liny zaczepiono przeciwwagę równą wadze małpki. 1 centymetr banana waży 10 gramów. Długość całkowita liny, w metrach, stanowi $\frac{1}{3}$ wieku małpki, wyrażonego w latach, a waga małpki, w gramach, jest równa 200-krotnej liczbie lat matki tej małpki. Łączny wiek małpki i jej matki wynosi 30 lat. Dodając 2-krotność wagi małpki i 40-krotność wagi banana, otrzymuje się ten sam rezultat, jak przy dodaniu 10-krotnej wagi liny oraz wagi użytej przeciwwagi. Wiek małpki jest równy połowie wieku, który będzie miała jej matka, gdy ona będzie miała obecny wiek swojej matki. Oblicz długość banana i podaj ją w centymetrach.

Odpowiedź: 21

Źródło zadania: Zadanie 12. z finału krajowego XVII Międzynarodowych Mistrzostw w Grach Matematycznych i Logicznych z drugiego dnia zawodów

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Maria Janyska

Rozwiązanie: Wprowadźmy oznaczenia na:

długość liny - d ,

wiek małpki - x ,

wiek matki małpki - z ,

waga liny - l ,

waga małpki - y ,

waga banana - b .

Zapiszmy układ równań na podstawie warunków zadania:

$$\begin{cases} d = \frac{1}{3}x \\ y = 200z \\ x + z = 30 \\ 2y + 40b = 10l + y \\ x = \frac{z+z-x}{2} \end{cases}$$

Na początek wyliczymy wiek małpki i jej matki.

$$\begin{cases} x + z = 30 \\ x = \frac{z+z-x}{2} \end{cases}$$

Te równania dają nam $x = 12, z = 18$. Możemy więc policzyć wagę małpki z równania $y = 200z$. Zatem $y = 3600$ gramów. Następnie poznamy długość liny $d = \frac{1}{3}x = 4$ metry. Skoro każdy metr liny waży 300 gramów, to cała lina waży 1200 gramów. Pozostaje nam użyć ostatniego równania i wyliczyć wagę i długość banana.

$$2y + 40b = 10l + y$$

$$y + 40b = 10l$$

$$3600 + 40b = 10 \cdot 1200$$

$$40b = 8400$$

$$b = 210$$

Każdy centymetr banana waży 10 gramów, więc banan o całkowitej wadze równej 210 gramów ma 21 centymetrów.

Zadanie 39. Dane są liczby całkowite a i b takie, że:

$$\frac{\text{NWW}(a, b)}{\text{NWD}(a, b)} = 6.$$

Ile jest możliwych wartości ilorazu $\frac{a}{b}$?

Odpowiedź: 4

Autor zadania: Michał Fronczek

Rozwiązanie: Niech $\text{NWD}(a, b) = d$. Wtedy $a = a_1d$ i $b = b_1d$ gdzie a_1 i b_1 są względnie pierwsze. Wtedy też $\text{NWW}(a, b) = a_1b_1d$. Tak więc

$$\frac{\text{NWW}(a, b)}{\text{NWD}(a, b)} = a_1b_1 = 6$$

Mamy więc cztery opcje:

(a) $a_1 = 1$ i $b_1 = 6$, wtedy

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1d}{b_1d} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{6}$$

(b) $a_1 = 2$ i $b_1 = 3$, wtedy

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1d}{b_1d} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{2}{3}$$

(c) $a_1 = 3$ i $b_1 = 2$, wtedy

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1d}{b_1d} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{3}{2}$$

(d) $a_1 = 6$ i $b_1 = 1$, wtedy

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1d}{b_1d} = \frac{a_1}{b_1} = 6$$

Mamy zatem cztery możliwe wartości naszego ilorazu.

Zadanie 40. Magda ma pudełko zapalek różnej długości i chce ułożyć z nich trójkąt o dodatnich kątach. Mateusz nie chce żeby jej się to udało, więc podmienił zawartość tego pudełka tak, że zadanie jest teraz niemożliwe do wykonania. Wiedząc, że pudełko ma wymiary $6\text{ cm} \times 11\text{ cm} \times 17\text{ cm}$ i że Mateusz nie użył zapalek krótszych niż 1 cm, znajdź największą liczbę zapalek, które mogą znajdować się w pudełku po sabotażu.

Odpowiedź: 8

Autor zadania: Robert Rościzak

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Robert Rościzak

Rozwiązanie: Zauważmy, że maksymalna długość zapalki w pudełku o danych wymiarach, może być obliczona używając Twierdzenia Pitagorasa:

$$\sqrt{18^2 + 10^2 + 5^2} = \sqrt{324 + 100 + 25} = \sqrt{449}$$

Liczba 449 jest między 21^2 a 22^2 , więc przekątna ma trochę ponad 21 cm. Rozważmy teraz możliwe długości zapalek. Jeżeli najmniejsza zapalka ma długość $d_1 = 1$, to następna też może mieć $d_2 = 1$. Jednak aby nie dało się skonstruować następnego musi nie zachodzić między nimi nierówność trójkąta, więc $d_3 \geq d_1 + d_2$. Ponieważ chcemy maksymalizować liczbę zapalek, to chcemy, aby zaszła równość. Daje to prosty wzór rekurencyjny, gdzie d_i jest i -tą liczbą Fibonacciego. Wypisujemy kolejne jego elementy:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

Już d_9 jest większe od 22, więc w pudełku może być maksymalnie 8 zapalek.

Odpowiedzi numeryczne do zadań

zadanie	wynik
1	2509
2	40°
3	$1 = 1 : 1$
4	11
5	$\frac{41}{70}$
6	16
7	27
8	16
9	42
10	34
11	$27.5\% = 27,5\% = 27\frac{1}{2}\%$
12	169
13	2
14	$\frac{1}{2} = 0.5 = 0,5$
15	24
16	<i>lody czekoladowe</i>
17	$2 + 2\sqrt{3}$
18	10
19	$30 < x < 120$
20	24

zadanie	wynik
21	15
22	4
23	$16\sqrt{5}$
24	$10 \text{ min} = \frac{1}{6} \text{ h}$
25	5
26	$(2, 5, 7, 3)$
27	<i>canta encainen</i>
28	$3 = 3 : 1$
29	480°
30	365
31	15
32	12
33	8
34	$2\sqrt{3} - 3$
35	46
36	$\infty = \text{nieskończenie wiele}$
37	$3.5 = 3,5 = 3\frac{1}{2}$
38	21
39	4
40	8

Spis treści

Zadania	2
Rozwiązania zadań	7
Odpowiedzi numeryczne do zadań	25